Sveučilište u Rijeci

Filozofski fakultet u Rijeci – Odsjek za matematiku

Vedran Miletić

Banachove algebre

Diplomski rad

Rijeka, ožujak 2009.

Sveučilište u Rijeci

Filozofski fakultet u Rijeci – Odsjek za matematiku

Vedran Miletić

Banachove algebre

Diplomski rad

Voditelj rada:

prof. dr. sc. Cvjetan Jardas

Rijeka, ožujak 2009.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ______________________________ pred nastavničkim povjerenstvom u sastavu:

1. ____, predsjednik

2. ____, član

3. ____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________

2. ______________________________

3. ______________________________

Sadržaj

Uvod

"The real voyage of discovery consists not in seeking new landscapes, but in having new eyes."

– Marcel Proust

Krajem 19. i početkom 20. stoljeća u matematici se događaju velike promjene u načinu razmišljanja i poimanja dotadašnjih teorija. Tada, između ostalog, nastaju apstraktna algebra i funkcionalna analiza kakve ih danas znamo. Moglo bi se reći da se zaista počinje formirati moderna matematika. Naravno, pritom ne tvrdimo da su sve teorije moderne matematike otkrivene tada, već samo da je način razmišljanja kakav vlada u modernoj matematici tada nastao.

Začeci te bujice novih ideja kreću sa Georgom Cantorom. U pet godina, od 1879. do 1884. on je u seriji od šest radova u Mathematische Annalen formirao osnove svoje teorije beskonačnih skupova i naišao na ogroman otpor i neprihvaćanje, kako to obično biva kad su prezentirane ideje revolucionarne. Četiri godine poslije toga Peano je aksiomatizirao pojam vektorskog prostora.[1] Usput je spomenuo kako te aksiome koje je dao može zadovoljiti i beskonačnodimenzionalan objekt, davši kao primjer skup polinoma nad poljem realnih ili kompleksnih brojeva.

Nažalost, to Peanovo otkriće samo po sebi nije potaknulo matematičare da krenu dalje istraživati beskonačnodimenzionalne vektorske prostore. Međutim, to ne čudi – naime, već u ono doba bile su poznate klase objekata koje su tek nešto kasnije dobile vrlo značajnu ulogu u formiranju funkcionalne analize: nizovi realnih, odnosno kompleksnih brojeva, analitičke funkcije kompleksne varijable i neprekidne funkcije realne varijable, a

[1] Iako se danas to podrazumijeva samo po sebi, ranije su se često matematički objekti izučavali bez formalnih aksioma u apstraktnom smislu, već samo poznavajući svojstva konkretnih klasa objekata. Slični je doprinos Cauchy dao kada je postavio aksiome grupe, promatrajući permutacijske grupe.

da se pritom nije vidjela ta zajednička osnova koja će tridesetak godina kasnije biti sasvim očita. To je još jedan pokazatelj kako je funkcionalna analiza sama po sebi zapravo novi pogled na već ranije poznate objekte, i pokušaj unifikacije različitih teorija kroz uočavanje određenih zajedničkih osnova.

Međutim, relativno brzo nakon Peanovog otkrića dogodio se niz značajnih pomaka. 1890. je Helge von Koch krenuo izučavati sustave beskonačno mnogo jednadžbi sa beskonačno mnogo nepoznanica. Našao je uvjete za konvergenciju determinante sustava (sama determinanta sustava je bila beskonačna, tako da se konkretno radilo o konvergenciji niza subdeterminanti), ovisno o konvergenciji beskonačnog produkta elemenata na glavnoj dijagonali pripadne matrice. Već se tu uviđala veza algebre i analize, no tek je u pravom smislu uočena 1904. Na screnu stupa David Hilbert, i prilikom analize Fredholmovih radova iz 1900. o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja određene klase integralnih jednadžbi, uočio je kako su rezultati koje je dobio vrlo slični von Kochovima, jedino što se u von Kochovom slučaju radi o prebrojivo dimenzionalnom vektorskom prostoru, a u Fredholmovom slučaju o neprebrojivo dimenzionalnom. Ovaj je rezultat dao ideju da postoji teorija koja objedinjuje linearnu algebru (sustave linearnih jednadžbi) i matematičku analizu (integralne jednadžbe). Konkretan primjer toga je Fredholmova alternativa, poznati njegov teorem o egzistenciji rješenja integralne jednadžbe koju je promatrao. Taj teorem, preciznije njegov iskaz, je tek jednostavna generalizacija relativno trivijalnog rezultata iz linearne algebre. Međutim, sam dokaz je značajno složeniji, pogotovo zato što nije moguće (za razliku od von Kochovog problema) integralnu jednadžbu dobiti kao limes sustava konačno mnogo jednadžbi sa konačno mnogo nepoznanica i primijeniti znanje iz linearne algebre. Inače, zanimljivo je da je upravo to Hilbert učinio, i time riješio von Kochov problem na značajno jednostavniji način.

Ubrzo se događa grananje i istražuju se različite klase objekata. Kasniji radovi Hadamarda, Frécheta, Lebesguea, Riesza, Fischera, Dinija, Pincherlea i Schmidta, da spomenemo tek neke od njih, daju tek ideju da postoji neka unificirajuća teorija svega što je dotad otkriveno, ali ne i više od toga. Tu vrijedi spomenuti važan Riesz-Fischerov teorem koji tvrdi da su ℓ^2 i L^2 izometrički izomorfni, tj. u apstraktnom smislu ekvivalentni, zato što je prvi očiti pokazatelj nerazdvojivosti topoloških i algebarskih svojstava objekata koji se ovdje razmatraju. Poprilično kompletan prelged nastanka i razvoja funkcionalne analize dan jeu Smithiesovom članku [9], a tamo se može naći i niz referenci na knjige i radove ovdje navedenih autora, te neke knjige i radove iz povijesti matematike.

Pravi procvat ideja slijedi dvadesetih godina dvadesetog stoljeća, sa prvim radovima stanovitog Stefana Banacha, za kojeg je Hugo Steinhaus ponosno izjavio kako je "njegovo najveće znanstveno otkriće".[2]

O Banachovom životu i školovanju može se puno reći. Ovdje navodimo samo onaj dio biografije koji je direktno vezan uz povijesno formiranje teorije Banachovih prostora i Banachovih algebri, a kompletna biografija je navedena na kraju u dodaktu ovog rada.

Njegov doktorat objavljen je 1922. i ondje je aksiomatizirao realni potpuni normirani vektorski prostor (koji je kasnije po njemu nazvan Banachov prostor; on je bio vrlo skroman i nazvao ga "prostor tipa (B)"). Pronašao je i dokazao osnovna svojstva tih prostora, te linearnih operatora koji djeluju na njima. Dokazao je slabiju varijantu teorema o uniformnoj ograničenosti, koja kaže da ako je niz operatora (F_n) neprekidan i $F_n(x) \to F(x)$ za $n \to \infty$, onda je i operator F neprekidan. Osim toga je razmatrao svojstva kontrakcija, mada su rezulati koje je dobio već ranije bili poznati.

Ubrzo zatim mnoge njegove definicije i rezultati su generalizirani, i napokon se, prvenstveno zahvaljujući Banachu, očitovalo kako izgleda unificirajuća teorija koja opisuje sve promatrane objekte. Može se, na neki način, reći kako je upravo Banach otac funkcionalne analize.

Svakako treba istaknuti barem još tri važna Banachova doprinosa: prvo, zajedno sa Steinhausom je 1927. dokazao generalnu formu pricipa uniformne ograničenosti, koristeći Baireove kategorije; drugo, neovisno o Hahnu je 1929. dokazao ono što danas zovemo Hahn-Banachov teorem (Hahn je 1927. dokazao određeni specijalni slučaj); treće, 1932. objavio je knjigu [1] o linearnim operatorima u kojoj je povezao velik dio do tada poznatih rezultata[3], otkrio mnogo novih (primjerice, teorem o otvorenom preslikavanju), te privukao pažnju na mnoge tada otvorene probleme, te na taj način utjecao više nego itko dotad na daljni razvoj funkcionalne analize.

U idućih nekoliko godina Banachovi rezultati prošireni su i na kompleksni slučaj[4]

[2] Inače je posebno zanimljiva priča o tome kako je Hugo Steinhaus "otkrio" Banacha. Ona je preduga da bi je ovdje ispričali i može se naći u dodatku ovoga rada.

[3] Većinu rezultata je generalizirao, a neke specijalne slučajeve je ujedinio. Knjiga se bitno ne razlikuje od današnjih uvodnih knjiga iz funkcionalne analize po načinu obrade i temama koje su obrađene.

[4] Kao i u klasičnoj analizi, često su dokazi složenijih tvrdnji u realnom i u kompleksnom slučaju bitno

(Banach je razmatrao samo realni), mnogi su generalizirani, i ubrzo je funkcionalna analiza postala preopširna da bi se čak i u osnovnim crtama mogla iskazati u jednoj knjizi.

Pojam Banachove algebre, interesantno, nije uveo sam Banach. On ih uopće nije ni izučavao, uz izuzetak algebre omeđenih linearnih operatora. Banachova algebra je prirodni analogon pojmu Banachovog prostora, kada su algebre u pitanju, i odatle je dobila svoj naziv. Uvedena je tek 1936. godine, a uveo je M. Nagumo, koji je dokazao da se Cauchyjeva teorija funkcija kompleksne varijable može proširiti na funkcije koje poprimaju vrijednosti u Banachovoj algebri i primijenio ih je na istraživanje pojma rezolvente omeđenog linearnog operatora oko izolirane singularne točke. Općenito su se operatorske algebre izučavale i ranije; već 1929. John von Neumann objavio je prvi rad o "prstenima operatora", kako ih je on nazivao. Međutim, njegovo je istraživanje bilo usmjereno u smjeru svojstava operatora nad Hilbertovim prostorima, tako da nije direktno utjecalo na razvoj apstraktne teorije Banachovih algebri, iako su neke od algebri koje je von Neumann promatrao po svojstvima istovremeno Banachove algebre. O tome se više može naći u Landsmanovoj skripti [4], koja počinje povijesnom pričom.

Meni je osobno funkcionalna analiza vrlo zanimljiva, i zato sam i odabrao ovu temu za diplomski rad. Pišući ovaj rad puno sam naučio o ne samo o Banachovim algebrama, već i o funkcionalnoj analizi općenito, i bilo mi je interesantno vidjeti kako taj dio matematike izgleda kada se malo "ozbiljnije" proučava. Ovom prilikom bih se želio zahvaliti svima koji su mi na neki način pomogli tokom studija u učenju, savladavanju i razumijevanju matematike, a pojedinačno Martini Ašenbrener, na nebrojenim bilježnicama, skriptama i drugim nastavnim materijalima koje sam od nje posuđivao (bez kojih bi mi bilo kudikamo teže), Robertu Peteru, na puno stvari iz raznih domena primjene matematike u fizici koje mi je objasnio, te svim svojim profesorima, koji su mi tokom četiri godine studija predavali i trudili se da to učine istovremeno zanimljivim, matematički korektnim i pristupačnim, što bez sumnje nije lako, a ponajviše svom mentoru, prof. dr. sc. Cvjetanu Jardasu, na inicijalnom poticaju na učenje funkcionalne analize kroz izučavanje metričkih i vektorskih prostora, pomoći prilikom izrade ovog rada i obavljanja pripadajućeg administrativnog dijela posla, mnogim korisnim savjetima i iskazanom strpljenju.

---

različiti. Osim postojanja imaginarne jedinice, razlog tome je i što na skupu realnih brojeva postoji uređaj, dok ga na skupu kompleksnih brojeva nema.

Poglavlje I

Pojmovi iz algebre i topologije

1 Algebarske osnove

U ovom poglavlju navodimo sve definicije i teoreme koje ćemo kasnije koristiti. Prvo navodimo algebarski dio. Definirati ćemo pojam grupe, polja, vektorskog prostora, algebre i homomorfizma tih struktura, te parcijalno uređenog skupa.

Definicija 1.1 (Binarna operacija)**.** ***Binarna operacija*** $\circ$ *na nepraznom skupu* G *je funkcija* $\circ : G \times G \to G$.

Definicija 1.2 (Grupa)**.** ***Grupa*** *je uređeni par* $(G, \circ)$ *koji se sastoji od nepraznog skupa* G *i binarne operacije* $\circ$ *definirane na skupu* G*, koja zadovoljava iduća svojstva:*

1. $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c, \forall a, b, c \in G$ *(asocijativnost)*

2. $\exists e \in G$ *takav da* $\forall a \in G$ *vrijedi* $a \circ e = e \circ a = a$ *(postojanje neutrala)*

3. $\forall a \in G\, \exists a^{-1} \in G$ *takav da vrijedi* $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$ *(postojanje inverza)*

Ako pored ovih svojstava grupa zadovoljava i svojstvo:

4. $a \circ b = b \circ a, \forall a, b \in G$ *(komutativnost)*

onda kažemo da da je grupa ***komutativna (Abelova) grupa****.*

Definicija 1.3 (Polje)**.** ***Polje*** *je uređena trojka* $(F, +, \cdot)$ *koji se sastoji od nepraznog skupa* F *i dvaju binarnih operacija* $+$ *i* $\cdot$ *definiranih na skupu* F*, koje zadovoljavaju iduća svojstva:*

1. $(F, +)$ *komutativna grupa s neutralom* 0*; pritom se inverz elementa* $a \in F$ *obzirom na zbrajanje označava sa* $-a$

2. $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ *komutativna grupa s neutralom* 1*; pritom se inverz elementa* a *obzirom na množenje označava sa* a^{-1}

3. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \forall a, b, c \in F$

   $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \forall a, b, c \in F$ *(distributivnost)*

Polja se često označavaju velikim masnim slovima, primjerice: $\mathbb{F}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Definicija 1.4 (Vektorski prostor)**.** ***Vektorski prostor*** *nad poljem* $\mathbb{F}$ *je uređena trojka* $(V, +, \cdot)$ *koji se sastoji od nepraznog skupa* V*, binarne operacije* $+$ *na skupu* V *i preslikavanja* $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$*, koje zadovoljavaju iduća svojstva:*

1. $(V, +)$ *komutativna grupa s neutralom* 0 *koji se naziva* ***nulvektor****; pritom se inverz elementa* $a \in V$ *obzirom na zbrajanje označava sa* $-a$

2. $\alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall a, b \in V$ *(distributivnost množenja prema zbrajanju u vektorskom prostoru)*

3. $(\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall a \in V$ *(distributivnost množenja prema zbrajanju u polju)*

4. $(\alpha \cdot \beta) \cdot a = \alpha \cdot (\beta \cdot a), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall a \in V$ *(kvaziasocijativnost)*

5. $1 \cdot a = a, \forall a \in V$*, pri čemu je* 1 *neutral za množenje u polju (unitarnost)*

Elementi polja se nazivaju ***skalari****, a elementi vektorskog prostora* ***vektori****.*

Definicija 1.5 (Algebra)**.** ***Algebra*** *nad poljem* $\mathbb{F}$ *je uređena četvorka* $(A, +, \circ, \cdot)$ *koji se sastoji od nepraznog skupa* A*, binarnih operacija* $+$ *i* $\circ$ *na skupu* A *i preslikavanja* $\cdot : \mathbb{F} \times A \to A$*, koje zadovoljavaju iduća svojstva:*

1. $(V, +, \cdot)$ *vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{F}$*, sa nulvektorom* 0

2. $(a + b) \circ c = a \circ c + b \circ c, \forall a, b, c \in A$ *(lijeva distributivnost)*

3. $a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c, \forall a, b, c \in A$ *(desna distributivnost)*

4. $(\alpha \cdot a) \circ (\beta \cdot b) = (\alpha \cdot \beta) \cdot (a \circ b), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall a, b \in A$ *(kompatibilnost sa skalarnim množenjem)*

*Ukoliko za operaciju $\circ$ redom postoji neutral u A (vrijedi svojstvo komutativnosti), tada se algebra naziva **algebra s jedinicom (komutativna algebra)**.*

Za algebru kažemo da je realna (kompleksna) algebra ako je pripadno polje polje realnih (kompleksnih) brojeva.

Često, radi jednostavnosti, kažemo da je G grupa, $\mathbb{F}$ polje, V vektorski prostor, A algebra ukoliko se operacije podrazumijevaju.

Osim toga, često ćemo u pisanju, ponovno radi jednostavnosti zapisa, izostavljati simbole $+, \circ$ i $\cdot$ jer se po specifikaciji elemenata operacija među njima podrazumijeva.

Definicija 1.6 (Operator, funkcional). *Neka su V_1 i V_2 vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Funkcija $T : V_1 \to V_2$ naziva se **operator**. Ukoliko je $V_2 = \mathbb{F}$, tada se operator T naziva funkcional. Funkcional T za koji je je $T(x) = 0, \forall x \in V_1$ naziva se **nul-funkcional**.*

Definicija 1.7 (Linearni operator). *Neka su V_1 i V_2 vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Operator $T : V_1 \to V_2$ je **linearan** ako vrijedi:*

1. $T(x + y) = T(x) + T(y), \forall x, y \in V_1$
2. $T(\alpha x) = \alpha T(x), \forall x \in V_1, \alpha \in \mathbb{F}$.

*U specijalnom slučaju $V_2 = \mathbb{F}$ dobivamo da je T **linearni funkcional**.*

Od sada nadalje definirati ćemo samo pojmove vezane uz operatore, a podrazumijevati ćemo, kada to ima smisla (tj. kada definicija vrijedi u specijalnom slučaju), da se definicija odnosi i na funkcionale.

Definicija 1.8 (Nulost operatora). *Neka su V_1 i V_2 vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Za linearni operator $T : V_1 \to V_2$ definiramo **nulost** sa:*

$$N(T) = \{x \in V_1 | T(x) = 0\} \tag{1.1}$$

Dimenznija nulosti, $\dim N(T)$ *naziva se **defekt** operatora.*

Zbog linearnosti od T vrijedi da je $N(T)$ potprostor od V_1, pa ova definicija defekta zaista ima smisla.

Svaki linearni operator je homomorfizam vektorskih prostora jer "čuva" operacije definirane na vektorskom prostoru. No, nama su puno interesantniji bijektivni homomorfizmi, jer oni čine ta dva prostora algebarski ekvivalentnim.

Definicija 1.9 (Izomorfizam vektorskih prostora)**.** ***Izomorfizam vektorskih prostora*** *V_1 i V_2 je funkcija $T : V_1 \to V_2$ koja je bijektivni linearni operator.*

Definicija 1.10 (Operator multiplikacije)**.** *Neka je V vektorski prostor i $M_\lambda : V \to V$ operator definiran sa $M_\lambda(x) = \lambda x$. Tada se M_λ naziva* ***operator multiplikacije*** *elementom λ.*

Operator multiplikacije je očito linearni operator.

Definicija 1.11 (Operator translacije)**.** *Neka je V vektorski prostor i $T_a(x) : V \to V$ operator definiran sa $T_a(x) = x + a$. Tada se T_a naziva* ***operator translacije*** *za element $a \in V$.*

Ovaj operator nije linearan osim u trivijalnom slučaju kada je $a = 0$ i on je tada identiteta.

Definicija 1.12 (Izomorfizam algebri)**.** *Neka su A_1 i A_2 algebre nad istim poljem $\mathbb{F}$.* ***Homomorfizam algebri*** *je funkcija $T : A_1 \to A_2$ koja zadovoljava iduća svojstva:*

1. $T(x + y) = T(x) + T(y), \forall x, y \in A_1$

2. $T(xy) = T(x)T(y), \forall x, y \in A_1$

3. $T(\alpha x) = \alpha T(x), \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x \in A_1$

Jezgra *ili nulost od T je skup svih $x \in A_1$ takvih da je $T(x) = 0$. Homomorfizam algebri koji je bijektivan naziva se* ***izomorfizam algebri****.*

Definicija 1.13 (Parcijalno uređen skup)**.** *Skup P naziva se* ***parcijalno uređen*** *relacijom $\leq$ ako vrijedi:*

1. *$a \leq b$ i $b \leq c$ povlači $a \leq c$,*

2. $a \leq a$, za svaki $a \in P$,

3. $a \leq b$ i $b \leq a$ povlači $a = b$.

*Podskup Q parcijalno uređenog skupa naziva se **totalno uređen** ako za svaki par elemenata $a, b \in Q$ vrijedi barem jedna od relacija $a \leq b$ i $b \leq a$.*

Teorem 1.1 (Hausdorffov princip maksimalnosti)**.** *Svaki neprazni parcijalno uređeni skup P sadrži maksimalan potpuno uređeni podskup Q.*[1]

2 Topološke osnove i osnove kompleksne analize

U ovom poglavlju navodimo osnovne topološke pojmove: topologija, metrika, norma, konvergencija niza, neprekidnost funkcije... a zatim navodimo nekoliko definicija i teorema iz kompleksne analize koje ćemo koristiti.

Definicija 2.1 (Topologija)**.** *Neka je X neprazan skup, $X \neq \emptyset$, i neka je τ familija podskupova skupa X, $\tau \subseteq \wp(X)$. τ je **topologija** na X ako vrijedi:*

1. $\emptyset, X \in \tau$ (prazan skup i cijeli X su elementi familije)

2. $\{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\} \subseteq \tau$ proizvoljna familija, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau$ (unija proizvoljne familije podskupova od τ je element od τ)

3. $\{A_i | i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}\} \subseteq \tau$ konačna familija, $\bigcap_{i \in I} A_i \in \tau$ (presjek konačne familije podskupova od τ je element od τ).

*U tom slučaju se uređeni par (X, τ) naziva **toploški prostor**. Za skup $U \in \tau$ kažemo da je **otvoren**. Za skup F čiji je komplement $F^c \in \tau$ kažemo da je **zatvoren**.*

Definicija 2.2 (Zatvarač, nutrina)**.** ***Zatvarač** od A, $Cl(A)$, je najmanji zatvoren nadskup skupa A. **Nutrina** od A, $Int(A)$, je najveći otvoren podskup skupa A.*

Definicija 2.3 (Kompaktan skup)**.** *Neka je (X, τ) topološki prostor i S neprazan podskup od X. Pokrivač skupa S je familija skupova $\{U_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ za koju vrijedi $S \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. Kompaktan skup je onaj skup za koji vrijedi da za svaki njegov pokrivač $\{U_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ postoji konačan potpokrivač $\{V_i | i = 1, 2, \ldots, n\} \subseteq \{U_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ takav da je $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_i$.*

[1] Maksimalan u smislu da ne postoji pravi nadskup tog skupa koji je podskup od P.

Definicija 2.4 (Baza topologije)**.** *Neka je τ topologija na skupu X. Skup $B \subseteq \tau$ naziva se* ***baza topologije*** *τ ako vrijedi da se svaki $U \in \tau$ može dobiti kao unija elemenata iz B, tj. $\exists\{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\} \subseteq B$ takav da je $U = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Pritom kažemo da baza B* ***generira*** *topologiju τ.*

Definicija 2.5 (Okolina točke)**.** *Neka je (X, τ) topološki prostor.* ***Okolina točke*** *$x \in X$ je svaki otvoren skup koji sadrži točku x. Skup svih okolina točke x označavamo sa $\mathcal{O}(x)$.*

Definicija 2.6 (Homeomorfizam)**.** *Neka su (X, τ_X) i (Y, τ_Y) topološki prostori. Funkcija $f : X \to Y$ je* ***homeomorfizam*** *ako vrijedi:*

1. *f je bijekcija,*
2. *f je neprekidna funkcija, te*
3. *f^{-1} je neprekidna funkcija.*[2]

Definicija 2.7 (Metrika)**.** *Neka je X neprazan skup, $X \neq \emptyset$, i neka je $d : X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija sa svojstvima:*

1. *$d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$ (nenegativnost)*
2. *$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (pozitivna definitnost)*
3. *$d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$ (simetričnost)*
4. *$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$ (nejednakost trokuta).*

Tada kažemo da je d ***metrika****, a uređeni par (X, d)* ***metrički prostor****.*

Propozicija 2.1. *Neka je (X, d) metrički prostor. Tada metrika d inducira topologiju na X. Baza te topologije je skup svih* ***kugli*** *radijusa $r \in \mathbb{R}$ sa centrom u $x \in X$, skupova oblika $K(x, r) = \{y \in X | d(x, y) < r\}$.*

Lako se pokaže da je to zaista tako, i mi to ovdje nećemo dokazivati.

Definicija 2.8 (Omeđen skup)**.** *Neka je (X, d) metrički prostor. Skup $S \subseteq X$ je omeđen ako postoji $r > 0$ i $x \in X$ takav da je $S \subseteq K(x, r)$.*

[2] Drugim riječima, f je otvoreno preslikavanje.

Definicija 2.9 (Norma)**.** *Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Funkcija $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ naziva se **norma** ako vrijedi:*

1. $\|x\| \geq 0, \forall x \in X$ *(nenegativnost)*

2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(pozitivna definitnost)*

3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x \in X$ *(kompatibilnost sa skalarnim množenjem)*

4. $\|x + y\| \leq \|x + z\| + \|z + y\|, \forall x, y, z \in X$ *(nejednakost trokuta).*

*Tada se uređeni par $(X, \|\cdot\|)$ (vektorski prostora X s funkcijom $\|\cdot\|$ naziva **normirani prostor**.*

Za razliku od topologije i metrike, koje su definirane na skupu, norma je definirana na vektorskom prostoru.

Također, vrijedi da norma inducira metriku.

Propozicija 2.2. *Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normirani prostor. Tada je sa $d(x, y) = \|x - y\|$ dana metrika na X.*

Ni ovu propoziciju nećemo dokazivati jer je dokaz vrlo jednostavan.

Definicija 2.10 (Niz)**.** *Neka je S neprazan skup, $S \neq \emptyset$. Funkcija $a : \mathbb{N} \to S$ naziva se **niz** u S. Pišemo a_n umjesto $a(n)$, a cijeli niz označavamo sa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ili kraće samo (a_n).*

Definicija 2.11 (Konvergencija niza u metrici)**.** *Neka (X, d) metrički prostor i neka je (a_n) niz u X. Kažemo da niz (a_n) **konvergira** ako vrijedi $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ $n > n_0 \Rightarrow d(a_n, a_0) < \epsilon$. Tada se a_0 naziva **limes** niza (a_n). Niz koji konvergira naziva se **konvergentan niz**.*

Konvergenciju niza moguće je definirati i na razini topologije, međutim nama to ovdje neće biti potrebno pa to nećemo činiti. Za većinu primjena biti će nam dovoljna i definicija konvergencije nizova u normi, koja je jasna iz gornje definicije. Isto vrijedi i za sve naredne definicije koje izvodimo na razini metrike, a one se daju specijalizirati na slučaj kada je prostor normiran.

Definicija 2.12 (Cauchyjev niz)**.** *Neka je (X, d) metrički prostor i neka je (a_n) niz u X. Kažemo da je (a_n) **Cauchyjev niz** ili kraće **C-niz** ako vrijedi $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ $m, n > n_0 \to d(a_m, a_n) < \epsilon$.*

Propozicija 2.3. *Svaki konvergentan niz je Cauchyjev niz.*

Normirani prostori u kojima vrijedi obrat ove tvrdnje imaju mnogo lijepih svojstava, i zato imaju posebno ime.

Definicija 2.13 (Potpunost, Banachov prostor)**.** *Topološki (metrički, normirani) prostor u kojemu je svaki Cauchyjev niz konvergentan naziva se* ***potpun*** *topolški (metrički, normirani) prostor. Potpun normirani prostor naziva se* ***Banachov prostor****.*

Definicija 2.14 (Neprekidnost u metrici)**.** *Neka su* (X, d_X) *i* (Y, d_Y) *metrički prostori i neka je* $f : X \to Y$ *funkcija. Kažemo da funkcija* f ***neprekidna*** *u točki* $x_0 \in X$ *ako vrijedi* $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X \ d(x_0, x) < \delta \Rightarrow d(f(x_0), f(x)) < \epsilon$*. Funkcija je neprekidna na* $S \subseteq X$ *ako je neprekidna u svakoj točki skupa* S*.*

Definicija 2.15 (Neprekidnost u topologiji)**.** *Neka su* (X, τ_X) *i* (Y, τ_Y) *topološki prostori i neka je* $f : X \to Y$ *funkcija. Kažemo da funkcija* f ***neprekidna*** *u točki* $x_0 \in X$ *ako je* $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(x_0) \ \forall V \in \mathcal{O}(f(x_0))$*. Funkcija je neprekidna na* $S \subseteq X$ *ako je neprekidna u svakoj točki skupa* S*.*

Funkcije koje su neprekidne u metrici su neprekidne i u topologiji koju ona inducira. To ovdje nećemo dokazivati.

Realna diferencijabilnost nam neće biti potrebna, tako da ćemo definirati samo diferencijabilnost u kompleksnom slučaju.

Definicija 2.16 (Diferencijabilnost, holomorfna funkcija)**.** *Neka je* $f : U \to \mathbb{C}$*,* $U \subseteq \mathbb{C}$ *otvoren podskup od* $\mathbb{C}$*. Za funkciju* f *kažemo da je* ***analitička*** *ili* ***holomorfna funkcija*** *ako je definirana njena derivacija* f' *u svakoj točki skupa* U*, tj. ako postoji limes*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{2.1}$$

u svakoj točki $z_0 \in U$*.*

Za takvu funkciju u realnom slučaju kažemo da je **diferencijabilna**. Međutim, u kompleksnom slučaju vrijedi da egzistencija derivacije prvog reda sama po sebi povlači egzistenciju derivacije svakog reda, a to lijepo svojstvo nažalost ne vrijedi u skupu realnih brojeva.

Napomena 2.1. *U gornjoj definiciji smo pretpostavili manje nego što se uobičajeno pretpostavlja. Naime, često se traži da funkcija f ima derivaciju i da ta derivacija bude neprekidna; međutim, može se dokazati (i to je poprilično netrivijalno) da je neprekidnost derivacije funkcije u kompleksnom slučaju osigurana ako derivacija postoji.*

Teorem 2.1 (Princip maksimuma modula)**.** *Neka je $f : U \to \mathbb{C}$ funkcija holomorfna na otvorenom povezanom skupu U, $U \subseteq \mathbb{C}$. Ako postoji $z_0 \in U$ takav da vrijedi $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ za sve $z \in U$, onda je f konstanta na U.*

Definicija 2.17 (Cijela funkcija)**.** *Za funkciju $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kažemo da je* ***cijela*** *ako je holomorfna na $\mathbb{C}$.*

Teorem 2.2 (Liouvilleov teorem)**.** *Neka je $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ cijela funkcija i ograničena na $\mathbb{C}$, tj. ako postoji $z_0 \in \mathbb{C}$ takav da vrijedi $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ za sve $z \in \mathbb{C}$, onda je f konstanta.*

Teorem 2.3 (Borel-Lebesgueov teorem)**.** *Neka je $K \subseteq \mathbb{C}$. Tada vrijedi: K je kompaktan ako i samo ako je K omeđen i zatvoren skup.*

Napomena 2.2. ***Indeks*** *točke $z \in \mathbb{C}$ obzirom na zatvorenu krivulju Γ koja ne sadrži z se označava sa $Ind_\Gamma(z)$ i vrijedi:*

$$Ind_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_\Gamma \frac{dw}{w - z}. \tag{2.2}$$

Teorem 2.4 (Cauchyjev teorem)**.** *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren, i neka je X kompleksan Fréchetov prostor, i pretpostavimo da je $f : \Omega \to X$ holomorfna funkcija. Tada vrijedi*

1. *Ako je Γ zatvorena krivulja u Ω takva da je $Ind_\Gamma(w) = 0$ za svaki $w \notin \Omega$, onda je*
$$\int_\Gamma f(w)dw = 0, \tag{2.3}$$
2. *te vrijedi*
$$f(z) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_\Gamma (w - z)^{-1} f(w)dw \tag{2.4}$$
kada je $z \in \Omega$ i $Ind_\Gamma(z) = 1$.
3. *Ako su Γ_1 i Γ_2 zatvorene krivulje u Ω takve da je*
$$Ind_{\Gamma_1}(w) = Ind_{\Gamma_2}(w) \tag{2.5}$$
za svaki $w \notin \Omega$, onda
$$\int_{\Gamma_1} f(w)dw = \int_{\Gamma_2} f(w)dw. \tag{2.6}$$

3 Osnove funkcionalne analize

U ovom ćemo poglavlju navesti osnovne pojmove i teoreme iz funkcionalne analize. Alternativni naziv ovog poglavlja bio bi algebarsko-topološke osnove, jer funkcionalna analiza upravo objedinjuje te dvije grane matematike i objekti imaju oba tipa svojstava.

Definicija 3.1 (Topološki vektorski prostor)**.** *Neka je X vektorski prostor i neka je τ topologija na X. Za X kažemo da je **topološki vektorski prostor** ako vrijedi:*

1. *svaki jednočlan skup je zatvoren, i*
2. *operacije $+$ i $\cdot$ su neprekidne u odnosu na topologiju τ.*

Napomena 3.1. *Neki autori izostavljaju zahtjev da je svaki jednočlan skup zatvoren. U tom slučaju topološki vektorski prostor nije Hausdorffov, te gubi neka od svojstava. Mi ćemo tu slijediti Rudina [7], i uzeti ovakvu definiciju.*

Za neprekidnost linearnih operatora vrijedi jedno lijepo svojstvo.

Propozicija 3.1. *Neka su X, Y topološki vektorski prostori. Linearni operator $T : X \to Y$ je neprekidan na cijelom vektorskom prostoru X ako i samo ako je neprekidan u nekoj točki $x_0 \in X$.*

Definicija 3.2 (Metrizabilnost)**.** *Neka je X topološki vektorski prostor sa topologijom τ. Kažemo da je X **metrizabilan** ako postoji metrika d na X koja inducira topologiju τ.*

Definicija 3.3 (Omeđeni linearni operator)**.** *Neka su X, Y topološki vektorski prostori, $T : X \to Y$ linearan operator. Za T kažemo da je **omeđen** ako T preslikava omeđene skupove u omeđene skupove, tj. ako je $T(E)$ omeđen podskup od Y za svaki E omeđen podskup od X.*

Propozicija 3.2. *Neka su X, Y topološki vektorski prostori takvi da je X metrizabilan. Tada je linearni operator $T : X \to Y$ neprekidan ako i samo ako je omeđen.*

Definicija 3.4 (Izometrički izomorfizam)**.** *Neka su X, Y metrizabilni topološki vektorski prostori i d_X, d_Y metrike definirane na njima respektivno. Linearni operator $T : X \to Y$ koji je bijektivan i za koji je $d_Y(T(x), T(y)) = d_X(x, y), \forall x, y \in X$ naziva se **izometrički izomorfizam**.*[3]

[3] Grubo rečeno, izometrički izomorfizam je funkcija koja "čuva" i operacije i metriku.

Definicija 3.5 (Kvocijentni prostor i kvocijentna topologija)**.** *Neka je N potprostor vektorskog prostora X. Za svaki $x \in X$, neka je $\pi(x)$ suskup od N koji sadrži x; dakle*

$$\pi(x) = x + N \tag{3.1}$$

*Ti suskupovi su elementi vektorskog prostora X/N, koji se naziva **kvocijentni prostor** od X modulo N, u kojemu su zbranjanje i eksterno množenje dani sa*

$$\pi(x) + \pi(y) = \pi(x + y), \qquad \alpha\pi(x) = \pi(\alpha x). \tag{3.2}$$

Obzirom da je N vektorski prostor, operacije su dobro definirane. To znači da ako je $\pi(x) = \pi(x')$, i $\pi(y) = \pi(y')$, onda

$$\pi(x) + \pi(y) = \pi(x') + \pi(y'), \qquad \alpha\pi(x) = \alpha\pi(x'). \tag{3.3}$$

*Ishodište u X/N je $\pi(0) = N$. Prema definiciji zbrajanja i eksternog množenja u X/N, π je linearan operator, $\pi : X \to X/N$, i nuost mu je N; naziva se **kvocijentno preslikavanje** od X na X/N.*

*Neka je τ vektorska topologija na X i neka je N zatvoren podprostor od X. Neka je τ_N skup svih podskupova $E \subseteq X/N$ za koje je $\pi^{-1}(E) \in \tau$. Tada τ_N postaje topologija na X/N, i naziva se **kvocijentna topologija**.*

Definicija 3.6 (Otvoreno preslikavanje)**.** *Neka su S i T topološki prostori. Funkcija $f : S \to T$ je **otvoreno preslikavanje** ako je $f(U)$ otvoren skup u T za svaki otvoren skup $U \subseteq S$.*

Teorem 3.1. *Neka je N zatvoren potprostor topološkog vektorskog prostora X. Neka je τ topologija na X i neka je τ_N definirana kao u definiciji 3.5. Tada vrijedi:*

1. *τ_N je vektorska topologija na X/N; kvocijentno preslikavanje $\pi : X \to X/N$ je linearno, neprekidno i otvoreno.*

2. *Ako je B lokalna baza za T, onda je $B_N = \{\pi(V) | V \in B\}$ lokalna baza za τ_N.*

3. *Svako od idućih svojstava od X nasljeđuje se u X/N: lokalna konveksnost, lokalna omeđenost, metrizabilnost, normabilnost.*

4. *Ako je X F-prostor, Fréchetov prostor ili Banachov prostor, isto je X/N. Specijalno je **kvocijentna norma** od X/N dana sa $\|\pi(x)\| = inf\{\|x - z\| : z \in N\}$.*

Teorem 3.2 (Teorem o otvorenom preslikavanju)**.** *Pretpostavimo:*

1. X *je F-prostor,*
2. Y *je topološki vektorski prostor,*
3. $\Lambda : X \to Y$ *je neprekidan i linearan, i*
4. $\Lambda(X)$ *je druge kategorije u* Y.

Tada vrijedi:

1. $\Lambda(X) = Y$,
2. Λ *je otvoreno preslikavanje, i*
3. Y *je F-prostor.*

Definicija 3.7 (Norma operatora)**.** *Neka su* X *i* Y *normirani prostori,* $\Lambda : X \to Y$ *linearan operator. Tada definiramo* ***normu operatora*** Λ *sa:*

$$\|\Lambda\| = \sup\{\|\Lambda(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1\}. \tag{3.4}$$

Može se dokazati da je obzirom na tu normu $\mathcal{B}(X, Y)$, skup svih omeđenih liearnih operatora sa X u Y normiran prostor i Banachov kada je Y Banachov ([7], str. 87.).

Definicija 3.8 (Topološka grupa)**.** *Neka je* G *grupa i neka je* τ *topologija na* G*. Kažemo da je* G ***topološka grupa*** *ako je:*

1. *svaki jednočlan skup je zatvoren, te*
2. *grupovna operacija je neprekidna u odnosu na topologiju* τ.

Obično se neprekidnost grupovne operacije osigurava tako da se pretpostavi neprekidnost preslikavanja $\phi : G \times G \to G$ definiranog sa $\phi(x, y) = xy^{-1}$.

Poglavlje II

Banachove algebre

4 Uvod

U ovom poglavlju uvodimo pojam Banachove algebre, dokazujemo osnovna svojstva, i navodima nekoliko najpoznatijh primjera Banachovih algebri.

Definicija 4.1 (Banachova algebra)**.** *Neka je A kompleksna algebra s jedinicom e. Ako je A Banachov prostor obzirom na normu $\|\cdot\|$ i k tome još zadovoljava:*

1. $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|, \forall x, y \in A$
2. $\|e\| = 1$

tada se A naziva (kompleksna) ***Banachova algebra****.*

Napomena 4.1. *Često se u literaturi Banachova algebra definira bez zahtjeva da ima jedinicu; no, kako većina algebri koje se izučavaju imaju jedinicu, i kako se ostalima može jedinica dodati jednostavnim postupkom ([7], str. 228.), ne gubi se na općenitosti.*

Nejednakost iz prvog svojstva iz definicije algebre čini množenje neprekidnom operacijom u A. Naime, zbog

$$x_n y_n - xy = (x_n - x)y + x(y_n - y) \tag{4.1}$$

vrijedi da ako $x_n \to x$ i $y_n \to y$, onda i $x_n y_n \to xy$.

Specijalno, množenje je neprekidno s lijeva i zdesna, tj.

$$x_n y \to xy \tag{4.2}$$

čim $x_n \to x$ i $y_n \to y$.

Za razliku od Banachovih prostora, gdje se može dokazati da je norma nulvektora jednaka 0, u slučaju identičnog elementa u Banachovoj algebri analogno svojstvo ne vrijedi. Drugim riječima, drugo svojstvo u definiciji Banachove algebre je nužno. Međutim, može se izvesti nešto slabiji uvjet koji izvodimo u idućoj propoziciji.

Propozicija 4.1. *Neka je A kao u definiciji 4.1 osim drugog svojstva; preciznije rečeno, neka je A Banachov prostor obzirom na normu $\|\cdot\|$ i kompleksna algebra s jedinicom e i neka još k tome vrijedi $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|, \forall x, y \in A$. Tada je $\|e\| \geq 1$.*

Dokaz. Neka je $x \in A \backslash \{0\}$. Vrijedi $\|x\| = \|xe\| \leq \|x\|\|e\|$, pa iz toga dobivamo

$$\frac{\|x\|}{\|x\|} = 1 \leq \|e\| \tag{4.3}$$

što je i trebalo dokazati. □

Interesantno je, pogotovo uzimajući u obzir sve dosad rečeno, da se prvo svojstvo u definiciji može zamijeniti s očito slabijim svojstvom 4.2, a da se drugo svojstvo može sasvim izostaviti bez da se poveća skup algebri koje se promatraju. Idući teorem nam opisuje situaciju u kojoj uzimamo slabiju definiciju.

Teorem 4.1. *Neka je A Banachov prostor i kompleksna algebra s jedinicom $e \neq 0$, i neka je množenje neprekidno s lijeva i zdesna (svojstvo 4.2). Tada postoji norma na A koja je topološki ekvivalentna zadanoj i obzirom na koju je A Banachova algebra.*

Napomena 4.2. *Pretpostavka da je $e \neq 0$ eliminira trivijalni slučaj $A = \{0\}$.*

Dokaz. Pridružimo svakom $x \in A$ operator lijevog množenja M_x definiran sa

$$M_x(z) = xz \ (z \in A) \tag{4.4}$$

Neka je $\tilde{A}$ skup svih M_x. Obzirom da je množenje zdesna neprekidno po pretpostavci, vrijedi da je $\tilde{A} \subseteq \mathcal{B}(A)$, Banachovog prostora koji čine svi omeđeni linearni operatori na A obzirom na operatorsku normu.

Lako se pokaže da je preslikavanje $x \mapsto M_x$ linearno, a zbog asocijativnosti vrijedi da je $M_{xy} = M_x M_y$. Naime, vrijedi

$$M_{xy}(z) = (xy)z = x(yz) = xM_y(z) = M_x(M_y(z)) \tag{4.5}$$

za svaki $z \in A$. Kako je pored toga za svaki $x \in A$

$$\|x\| = \|xe\| = \|M_x e\| \leq \|M_x\| \|e\| \tag{4.6}$$

vrijedi da je preslikvanje $x \mapsto M_x$ izomorfizam algebri A i $\tilde{A}$, čiji je inverz neprekidan. Obzirom da je $\|M_x M_y\| \leq \|M_x\| \|M_y\|$ i $\|M_e\| = \|I\| = 1$, vrijediti će da je $\tilde{A}$ Banachova algebra, ako dokažemo potpunost. Zatim teorem o otvorenom preslikavanju osigurava da je $x \mapsto M_x$ neprekidno preslikavanje, a zbog svega toga vrijedi da su $\|x\|$ i $\|M_x\|$ ekvivalentne norme na A.

Da bi dokazali potpunost od $\tilde{A}$, dovoljno je pokazati da je $\tilde{A}$ zatvoreni potprostor od $\mathcal{B}(A)$, pa će zbog potpunosti od $\mathcal{B}(A)$ i $\tilde{A}$ biti potpuna. Neka je $T \in \mathcal{B}(A), T_i \in \tilde{A}$ i neka $T_i \to T$ u topologiji od $\mathcal{B}(A)$. Kako je T_i lijevo množenje elementom $x_i \in A$, onda

$$T_i(y) = x_i y = (x_i e)y = T_i(e)y \tag{4.7}$$

Kada $i \to \infty$, prvi član u 4.7 teži u $T(y)$, i $T_i(e) \to T(e)$. Obzirom da je množenje po pretpostavci teorema neprekidno s lijeva u A, slijedi da posljednji član u 4.7 teži u $T(e)y$. Stavimo $x = T(e)$. Tada je

$$T(y) = T(e)y = xy = M_x(y), \forall y \in A \tag{4.8}$$

pa je $T = M_x \in \tilde{A}$, i $\tilde{A}$ sadrži limese svih svojih konvergentnih nizova, pa vrijedi da je zatvoren. □

Nekoliko primjera Banachovih algebri:

1. Neka je $C(K)$ Banachov prostor svih neprekidnih kompleksnih funkcija na kompaktnom Hausdorffovom topološkom prostoru K, sa supremum normom. Neka je množenje dano sa $(fg)(p) = f(p)g(p)$. Time $C(K)$ postaje komutativna Banachova algebra; konstantna funkcija $1(p) = 1$ je jedinični element.

   Ako je K konačana skup, i ima recimo n točaka, onda je $C(K)$ jednostavno $\mathbb{C}^n$, sa množenjem po koordinatama. Specijalno za $n = 1$ dobivamo najjednostavniju Banachovu algebru, $\mathbb{C}$, sa apsolutnom vrijednosti kao normom.

2. Neka je X Banachov prostor. Tada je $\mathcal{B}(X)$, algebra svih omeđenih linearnih operatora, Banachova algebra, obzirom na uobičajenu operatorsku normu. Identični

operator $I(x) = x$ je jedinični element. Ako je $dimX = n < \infty$, onda je $\mathcal{B}(X)$ upravo algebra svih kompleksnih matrica reda n. Ako je $dimX > 1$, onda $\mathcal{B}(X)$ nije komutativna. (Trivijalni vektorski prostor $X = \{0\}$ se mora isključiti kod razmatranja Banachove algebre.)

3. Ako je K neprazan kompaktan podskup od $\mathbb{C}$ ili od $\mathbb{C}^n$, i ako je A podalgebra od $C(K)$ koja sadrži one $f \in C(K)$ koje su holomorfne u interioru skupa K, onda je A potpuna (obzirom na supremum normu) i zato je Banachova algebra.

   U slučaju kada je K zatvoreni jedinični krug u $\mathbb{C}$, onda se A naziva algebra jediničnog kruga.

Postoji nekoliko razloga zašto smo se ograničili na Banachove algebre nad poljem kompleksnih brojeva, unatoč tome što postoje i realne Banachove algebre i izučene su. (Definicija realnih Banachovih algebri je sasvim analogna ovoj danoj za kompleksne.)

Jedan od razloga je taj što određena osnovna svojstva holomorfnih funkcija igraju važnu ulogu u osnovi razmatranja Banachovih algebri. To se može vidjeti u narednim poglavljima.

Osim toga, polje $\mathbb{C}$ ima samo po sebi netrivijalnu involuciju (involucije će biti definirane nešto kasnije), konkretno, konjugiranje, i mnoga svojstva određenih tipova Banachovih algebri ovise o postojanju involucije.

Vidjet ćemo kako će i topološka svojstva polja $\mathbb{C}$ u jednom trenutku biti značajna. Međutim, prije svega moramo definirati kompleksne homomorfizme i ispitati njihova svojstva, što je tema idućeg poglavlja.

5 Kompleksni homomorfizmi

Jedna od važnih preslikavanja među Banachovim algebrama su zasigurno homomorfizmi. Podsjetimo se, to su linearna preslikavanja koja su istovremeno i multiplikativna ("čuvaju" obje operacije). Posebno je interesantan slučaj u kojem je kodomena tog preslikavanja najjednostavnija Banachova algebra, tj. upravo polje $\mathbb{C}$.

Definicija 5.1. *Neka je A kompleksna algebra i $\phi : A \to \mathbb{C}$ funkcional koji nije nul-funkcional. Ako je $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y), \forall x, y \in A$, tada ϕ nazivamo **kompleksni homomorfizam** na A.*

Napomena 5.1. *Nul-funkcional $\phi \equiv 0$ je izostavljen iz gornje definicije iz praktičnih razloga, koji će biti jasni nešto kasnije kada budemo razvili dovoljno teorije.*

Definicija 5.2. *Za element $x \in A$ kažemo da je **invertibilan** ako ima inverz u A, tj. ako postoji $x^{-1} \in A$ takav da je $xx^{-1} = x^{-1}x = e$, pri čemu je e jedinični element u A.*

Uočimo da je za svaki $x \in A$ inverz jedinstven jer ako pretpostavimo $yx = e = xz$, onda je $y = ye = y(xz) = (yx)z = ez = z$.

Propozicija 5.1. *Ako je ϕ kompleksni homomorfizam na kompleksnoj algebri A sa jedinicom e, onda je $\phi(e) = 1$, te je $\phi(x) \neq 0$ za svaki invertibilni $x \in A$.*

Dokaz. Za neki $y \in A$ vrijedi da je $\phi(y) \neq 0$ jer ϕ nije nul-funkcional. Obzirom da

$$\phi(y) = \phi(ye) = \phi(y)\phi(e) \tag{5.1}$$

slijedi da je $\phi(e) = 1$, pa za invertibilan $x \in A$ imamo:

$$\phi(x)\phi(x^{-1}) = \phi(xx^{-1}) = \phi(e) = 1 \tag{5.2}$$

pa je $\phi(x) \neq 0$. $\square$

Prva i posljednja tvrdnja idućeg teorema vjerojatno su najkorištenije činjenice u teoriji Banachovih algebri. Jedna od posljedica posljednje tvrdnje je neprekidnost kompleksnih homomorfizama Banachove algebre.

Teorem 5.1. *Neka je A Banachova algebra, $x \in A$, $\|x\| < 1$. Tada vrijedi:*

1. *$e - x$ je invertibilan*
2. *$\|(e-x)^{-1} - e - x\| \leq \frac{\|x^2\|}{1-\|x\|}$*
3. *$|\phi(x)| < 1$ za svaki kompleksni homomorfizam ϕ na A.*

Dokaz. Obzirom da je $\|x^n\| \leq \|x\|^n$ i $\|x\| < 1$, elementi definirani sa

$$s_n = e + x + x^2 + \ldots + x^n = \sum_{i=0}^{n} x^i \tag{5.3}$$

formiraju Cauchyjev niz u A. Obzirom da je A potpun, postoji $s \in A$ takav da vrijedi $s_n \to s$. Kako zbog $x^n \to 0$ i

(5.4)

neprekidnost množenja povalči da je s inverz elementa $e - x$. Nadalje, iz 5.3 imamo

$$\|s - e - x\| = \|x^2 + x^3 + \dots\| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \|x\|^n = \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|} \tag{5.5}$$

Naposlijetku pretpostavimo da je $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \geq 1$. Prema gore dokazanom vrijedi da je $e - \lambda^{-1}x$ invertibilan, jer je $\|\lambda^{-1}x\| = |\lambda^{-1}|\|x\| < \|x\|1$. Prema propoziciji 5.1, imamo

$$1 - \lambda^{-1}\phi(x) = \phi(e - \lambda^{-1}x) \neq 0 \tag{5.6}$$

pa je $\phi(x) \neq \lambda$, što povlači $|\phi(x)| < 1$. Time je dokaz gotov. □

Sada ćemo dokazati jednu lemu koja će nam biti potrebna za idući teorem.

Lema 5.1. *Neka je f cijela funkcija jedne kompleksne varijable, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, i*

$$0 < |f(\lambda)| \leq e^{|\lambda|} \; (\lambda \in \mathbb{C}) \tag{5.7}$$

Tada je $f(\lambda) = 1$ za sve $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dokaz. Obzirom da f nema nultočku, postoji cijela funkcija g takva da je $f = e^g$, pri čemu je $g(0) = g'(0) = 0$, i $\Re[g(\lambda)] \leq |\lambda|$. Ova nejednakost povlači

$$|g(\lambda)| \leq |2r - g(\lambda)| \; (|\lambda| \leq r). \tag{5.8}$$

Funkcija definirana sa

$$h_r(\lambda) = \frac{r^2 g(\lambda)}{\lambda^2[2r - g(\lambda)]} \tag{5.9}$$

je holomorfna u $\lambda : |\lambda| < 2r$, i $|h_r(\lambda)| \leq 1$kada je $|\lambda| = r$. Prema principu maksimuma modula, sada slijedi

$$|h_r(\lambda)| \leq 1 \; (|\lambda| \leq r). \tag{5.10}$$

Fiksirajmo λ i stavimo da $r \to \infty$. Dobivamo da je $g(\lambda) = 0$, što povlači $f(\lambda) = 1$, za sve $\lambda \in \mathbb{C}$, a to je i trebalo dokazati. □

Ova lema će nam biti potrebna u dokazu idućeg teorema. Interesantan rezultat otkriven 1967. za komutativne Banachove algebre, i generaliziran 1968. na nekomutativne, pokazuje da je propozicija 5.1 zapravo potpuno karakterizira kompleksne homomorfizme. Preciznije, iskaz je sljedeći.

Teorem 5.2 (Gleason, Kahane, Zelazko)**.** *Neka je ϕ linearni na Banachoj algebri A, takav da je $\phi(e) = 1$ i $\phi(x) \neq 0$ za svaki invertibilni $x \in A$, onda vrijedi*

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)\ (x \in A, y \in A). \tag{5.11}$$

Dokaz koji ovdje dajemo preuzet je iz Rudina [7] i nešto je pojednostavljena verzija originalnog dokaza iz 1968. Također, uočimo da neprekidnost od ϕ nije pretpostavljena u iskazu teorema.

Dokaz. Neka je N nulost od ϕ. Ako su $x, y \in A$, pretpostavka $\phi(e) = 1$ pokazuje da je

$$x = a + \phi(x)e,\ y = b + \phi(y)e, \tag{5.12}$$

gdje je $a, b \in N$. Ako sa ϕ djelujemo na produkt gornjih jednadžbi, dobivamo:

$$\phi(xy) = \phi(ab) + \phi(x)\phi(y). \tag{5.13}$$

Željeni uvjet 5.11 je zbog toga ekvivalentan sa

$$ab \in N\ a, b \in N. \tag{5.14}$$

Pretpostavimo da smo dokazali specijalan slučaj tvrdnje 5.14, za $a = b$, tj.

$$a^2 \in N\ a \in N. \tag{5.15}$$

Onda zbog 5.13 kad uzmemo $x = y$, to povlači da je

$$\phi(x^2) = [\phi(x)]^2\ (x \in A). \tag{5.16}$$

Zamijenimo li tu x sa $x + y$ imamo

$$\phi((x+y)^2) = [\phi(x+y)]^2 \tag{5.17}$$

$$\phi(x^2 + xy + yx + y^2) = [\phi(x) + \phi(y)]^2 \tag{5.18}$$

$$\phi(x^2) + \phi(y^2) + \phi(xy + yx) = \phi(x)^2 + \phi(y)^2 + 2\phi(x)\phi(y) \tag{5.19}$$

iz čega na kraju dobivamo dobivamo

$$\phi(xy + yx) = 2\phi(x)\phi(y)\ (x, y \in A). \tag{5.20}$$

To znači da je

$$xy + yx \in N\ x \in N, y \in A. \tag{5.21}$$

Lako se provjeri da vrijedi jednakost

$$(xy - yx)^2 + (xy + yx)^2 = 2[x(yxy) + (yxy)x]. \tag{5.22}$$

Ako je $x \in N$, desna strana u 5.22 je u N, zbog 5.21, a isto je tako i $(xy + yx)^2$, zbog 5.21 i 5.16. To povlači da je i $(xy - yx)^2 \in N$, pa kad na to primijenimo 5.16 dobivamo:

$$xy - yx \in N \ x \in N, y \in A. \tag{5.23}$$

Zbrojimo li 5.21 i 5.23 dobivamo 5.14, dakle vrijedi 5.11. To znači da 5.15 implicira 5.11, iz strogo algebarskih razloga. Međutim, dokaz od 5.15 zahtijeva analitičke metode. Sada ćemo ga provesti.

Prema pretpostavci teorema, N ne sadrži niti jedan invertibilni element od A. Dakle, vrijedi $\|e - x\| \geq 1$ za svaki $x \in N$, prema prvoj tvrdnji u teoremu 5.1. Stoga je

$$\|\lambda e - x\| \geq |\lambda| = |\phi(\lambda e - x)| \ (x \in N, \lambda \in \mathbb{C}). \tag{5.24}$$

Dakle, zaključujemo da je ϕ neprekidni linearni funkcional na A, norme 1. Da bi dokazali 5.15, neka je dan proizvoljan, ali fiksan $a \in N$. Pretpostavimo da je $\|a\| = 1$ bez gubitka općenitosti, jer je u protivnom uvijek moguće odabrani element normirati. Definirajmo

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi(a^n)}{n!} \lambda^n \ (\lambda \in \mathbb{C}) \tag{5.25}$$

Obzirom da je $|\phi(a^n)| \leq \|a^n\| \leq \|a\|^n = 1$, f je cijela funkcija i zadovoljava $|f(\lambda)| \leq e^{|\lambda|}$ za sve $\lambda \in \mathbb{C}$. Osim toga, $f(0) = \phi(e) = 1$, i $f'(0) = \phi(a) = 0$.

Ako dokažemo sad da je $f(\lambda) \neq 0$ za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$, zbog prethodne leme 5.1 će vrijediti $f''(0) = 0$; dakle, $\phi(a^2) = 0$, što dokazuje pretpostavku 5.15.

Red

$$E(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} a^n \tag{5.26}$$

konvergira u normi od A, za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$. Neprekidnost od ϕ povlači da vrijedi

$$f(\lambda) = \phi(E(\lambda)) \ (\lambda \in \mathbb{C}). \tag{5.27}$$

Jednakost $E(\lambda + \mu) = E(\lambda)E(\mu)$ dokazuje se iz 5.26 kao i u skalarnom slučaju (kod uobičajene eksponencijalne funkcije). Iz toga specijalno slijedi

$$E(\lambda)E(-\lambda) = E(0) = e \ (\lambda \in \mathbb{C}). \tag{5.28}$$

Odavde uviđamo kako je $E(\lambda)$ invertibilan element Banachove algebre A, za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$. To povlači, po pretpostavci teorema, da je $\phi(E(\lambda)) \neq 0$, i zbog toga je $f(\lambda) \neq 0$, prema 5.27. Time je dokaz gotov. □

6 Spektar. Osnovna svojstva

Razmotrimo za početak sljedeće: neka je A Banachova algebra. Označimo sa $G = G(A)$ skup svih invertibilnih elemenata od A, tj.

$$G(A) = \{x \in A | \exists x^{-1} \in A\}. \tag{6.1}$$

Kako je za $x, y \in G$ element $y^{-1}x$ inverz od $x^{-1}y$, vrijedi da je i taj element invertibilan, pa je i on u G. Dakle, G je grupa.

Tokom ovog poglavlja zanimat će nas koji translati elemeta x za element u smjeru e *nisu* invertibilni. Time dolazimo do pojma spektra.

Definicija 6.1 (Spektar i rezolventni skup elementa)**.** *Neka je A Banachova algebra. Za $x \in A$* ***spektar*** *$\sigma(x)$ elementa x je skups svih kompleksnih brojeva λ takvih da $\lambda e - x$* nije *invertibilan.*[1] *Komplement od $\sigma(x)$ naziva se* ***rezolventni skup****, a sastoji se od svih $\lambda \in \mathbb{C}$ za koje postoji $(\lambda e - x)^{-1}$.*

Definicija 6.2 (Spektralni radijus)**.** *Neka je A Banachova algebra i $x \in A$.* ***Spektralni radijus*** *elementa x je broj*

$$\rho(x) = sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}. \tag{6.2}$$

Geometrijski je to radijus najmanjeg zatvorenog kruga u $\mathbb{C}$, sa centrom u 0, koji sadrži $\sigma(x)$. Naravno, 6.2 ne bi imao smisla kada bi $\sigma(x)$ bio prazan skup ili kada bi bio neograničen, ali, kao što ćemo dokazati, nijedno od toga se ne može doogoditi.

[1] Originalna ideja o spektru koju je imao David Hilbert bila je kao skup svih elemenata za koje $e - \lambda x$ nije invertibilan. Međutim, tako dobiveni rezultati nisu bili u skladu sa Rieszovim intuitivnim idejama o značenju spektra, te je on doslovce “preokrenuo” definiciju i dobio ovu koja se i danas koristi. Jedna od odmah uočenih prednosti ovakve definicije da je karakteristična vrijednost $\lambda = \infty$ postala $\lambda = 0$, s čime je puno lakše baratati.

Teorem 6.1. *Neka je A Banachova algebra, $x \in G(A)$, $h \in A$, $\|h\| < \frac{1}{2}\|x^{-1}\|^{-1}$. Tada je $x + h \in G(A)$, i vrijedi*

$$\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}\|^3\|h\|^2. \tag{6.3}$$

Dokaz. Obzirom da je $x + h = x(e + x^{-1}h)$ i $\|x^{-1}h\| < \frac{1}{2}$, zbog teorema 5.1 vrijedi da je $x + h \in G(A)$ i da je norma elementa

$$(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1} = [(e + x^{-1}h)^{-1} - e + x^{-1}h] \tag{6.4}$$

je uvijek manja ili jednaka $2\|x^{-1}h\|^2\|x^{-1}\|$, iz čega direktno slijedi ono što je trebalo dokazati. $\square$

Teorem 6.2. *Ako je A Banachova algebra, onda je $G(A)$ otvoren podskup od A, i preslikavanje $x \mapsto x^{-1}$ je homeomorfizam $G(A)$ na $G(A)$.*

Dokaz. Činjenica da je $G(A)$ otvoren slijedi iz 6.1, kao i neprekidnost preslikavanja $x \mapsto x^{-1}$. Obzirom da $x \mapsto x^{-1}$ preslikava $G(A)$ na $G(A)$ i da je sam svoj inverz, vrijedi da je homeomorfizam. $\square$

Teorem 6.3. *Ako je A Banachova algebra i $x \in A$, onda je*

1. *spektar $\sigma(x)$ elementa x je kompaktan i neprazan, te*

2. *za spektralni radijus $\rho(x)$ elementa x vrijedi*

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\geq 1} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \tag{6.5}$$

Prije nego krenemo dokazati ovaj teorem, važno je uočiti dvije stvari koje nam osigurava druga tvrdnja teorema – poznata pod imenom **formula spektralnog radijusa**:

1. da postoji limes $\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$, te

2. da specijalno vrijedi formula

$$\rho(x) \leq \|x\| \tag{6.6}$$

   što nam osigurava da je spektar ograničen skup.

Dokaz. Ako je $|\lambda| > \|x\|$, onda je $e - \lambda^{-1}x$ element od $G(A)$, prema teoremu 5.1, a isto vrijed ii za $\lambda e - x$. Stoga $\lambda \notin \sigma(x)$, što dokazuje formulu 6.6.

Da bi dokazali da je $\sigma(x)$ zatvoren, definirajmo $g : \mathbb{C} \to A$ sa $g(\lambda) = \lambda e - x$. Stavimo da je Ω komplement spektra $\sigma(x)$ elementa x. Tada je g neprekidan, i Ω je upravo jednak $g^{-1}(G(A))$, a $G(A)$ je otvoren, prema teoremu 6.2. Dakle, dobivamo da je Ω otvoren skup. Dakle, $\sigma(x)$ je omeđen i zatvoren podskup od $\mathbb{C}$, pa je kompaktan prema Borel-Lebesgueovom teoremu.

Sada definirajmo $f : \Omega \to G(A)$ sa

$$f(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1} \ (\lambda \in \Omega) \tag{6.7}$$

U teoremu 6.1 zamijenimo x sa $\lambda e - x$ i h sa $(\mu - \lambda)e$. Ako je $\lambda \in \Omega$ i μ je dovoljno blizu λ, rezultat te substitucije je

$$\|f(\mu) - f(\lambda) + (\mu - \lambda)f^2(\lambda)\| \leq 2\|f(\lambda)\|^3|\mu - \lambda|^2, \tag{6.8}$$

pa je

$$\lim_{\mu \to \lambda} = \frac{f(\mu) - f(\lambda)}{\mu - \lambda} = -f^2(\lambda) \ (\lambda \in \Omega). \tag{6.9}$$

Vrijedi, dakle, da je f holomorfna funkcija varijable iz Banachove algebre A sa vrijednostima u Ω.

Ako je $|\lambda| > \|x\|$, na isti način kao u teoremu 5.1 dobivamo

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1}x^n = \lambda^{-1}e + \lambda^{-2}x + \ldots \tag{6.10}$$

Taj red konvergira uniformno na svakom krugu Γ_r sa centrom u 0 i radijusa $r > \|x\|$, pa se može integrirati član po član. Dobivamo

$$x^n = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\Gamma_r} \lambda^n f(\lambda) d\lambda \ (r > \|x\|, n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{6.11}$$

Kada bi $\sigma(x)$ bio prazan, Ω bi bio jednak čitavom $\mathbb{C}$, i Cauchyjev teorem bi povlačio da su svi integrali u 6.11 jednaki 0. No, kad je $n = 0$, lijeva strana u 6.11 je upravo $e \neq 0$. Dakle, vrijedi suprotno, tj. $\sigma(x)$ nije prazan skup.

Obzirom da Ω sadrži sve λ za koje vrijedi $|\lambda| > \rho(x)$, zbog Cauchyjevog teorema vrijedi da uvjet $r > \|x\|$ se može zamijeniti u 6.11 sa $r > \rho(x)$. Ako je sad

$$M(r) = \max_{\theta} \|f(re^{\imath\theta}\| \ (r > \rho(x)), \tag{6.12}$$

pa zbog neprekidnosti funkcije f dobivamo da je $M(r) < \infty$. Iz 6.11 sada imamo

$$\|x^n\| \leq r^{n+1}M(r), \tag{6.13}$$

i dobivamo da je

$$\limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r \ (r > \rho(x)) \tag{6.14}$$

pa je

$$\limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \rho(x). \tag{6.15}$$

S druge strane, ako je $\lambda \in \sigma(x)$, faktorizacija

$$\lambda^n e - x^n = (\lambda e - x)(\lambda^{n-1}e + \ldots + \ x^{n-1}) \tag{6.16}$$

pokazuje da $\lambda^n e - x^n$ nije invertibilan. Stoga je $\lambda^n \in \sigma(x^n)$. Prema 6.6, $|\lambda^n| \leq \|x^n\|$ za $n = 1, 2, 3, \ldots$. Stoga je

$$\rho(x) \leq \inf_{n\geq 1} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}, \tag{6.17}$$

a onda je 6.5 posljedica 6.16 i 6.17. Time je dokaz gotov. $\square$

Nepraznost spektra nam omogućuje da relativno lako izdvojimo one Banachove u kojima je dijeljenje moguće (drugim rječima, svaki element osim 0 je invertibilan). Idući vrlo poznati teorem govori o tome.

Teorem 6.4 (Gelfand-Mazur)**.** *Ako je A Banachova algebra u kojoj je svaki ne-nul element invertibilan, tada je A izometrički izomorfna polju kompleksnih brojeva.*

Dokaz. Ako je $x \in A$ i $\lambda_1 \neq \lambda_2$, onda je najviše jedan od elemenata $\lambda_1 e - x$ i $\lambda_2 e - x$ jednak 0; dakle barem jedan od njih je invertibilan. Kako $\sigma(x)$ nije prazan, slijedi da $\sigma(x)$ sadrži točno jednu točku za svaki $x \in A$. Označimo tu točku sa $\lambda(x)$.

Obzirom da $\lambda(x)e - x$ nije invertibilan, jednak je 0, iz čega dobivamo da je $x = \lambda(x)e$. Funkcija $x \mapsto \lambda(x)$ je dakle izomorfizam sa A na $\mathbb{C}$, koji je istovremeno izometrija obzirom da vrijedi

$$|\lambda(x)| = \|\lambda(x)e\| = \|x\| \tag{6.18}$$

za svaki $x \in A$. $\square$

Napomena 6.1. *1. Uočimo kako je invertibilnost elementa $x \in A$ čisto algebarsko svojstvo. Spektar i spektralni radijus su zbog toga definirani u terminima čisto algebarske strukture od A, neovisno o metričkim (ili topološkim) svojstvima. S druge strane, $\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ očito ovisi o normi na A. To je jedno zanimljivo svojstvo formule spektralnog radijusa – ona potvrđuje jednakost veličina do kojih se dolazi na prilično različite načine.*

2. Banachova algebra A može biti podalgebra neke veće Banachove algebre B, i tada se može dogoditi da neki $x \in A$ nije invertibilan u A, ali je invertibilan u B. Spektar od x, dakle, ovisi o promatranoj algebri. S druge strane, spektralni radijus, koji ovisi o metričkim svojstvima i potencijama od x, ostaje nepromijenjen jer su obje karakteristike neovisne o svemu što se nalazi van A.

7 Grupa invertibilnih elemenata

Sada ćemo detaljnije razmotriti strukturu grupe $G = G(A)$, grupe invertibilnih elemenata Banachove algebre A.

Sa G_1 ćemo označavati komponentu od G koja sadrži e, jedinični element od G. Čest naziv za skup G_1 je *osnovna komponenta* od G. Prema definiciji pojma komponente, G_1 je unija svih povezanih podskupova od G koji sadrže e.

Definicija 7.1 (Eksponencijalna funkcija)**.** *Eksponencijalna funkcija $x \mapsto \exp(x)$ je definirana redom potencija*

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \tag{7.1}$$

u proizvoljnoj Banachovoj algebri A.

Grupa G sadrži skup

$$\exp(A) = \{\exp(x) \in A\}, \tag{7.2}$$

skup slika eksponencijalne funkcije kojoj je varijabla element iz A, obzirom da je $\exp(-x)$ inverz od $\exp(x)$, pa je taj element invertibilan. Svojstvo eksponencijalne funkcije poznato iz skupa realnih brojeva

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y) \tag{7.3}$$

vrijedi i ovdje kada elementi x i y komutiraju, tj. kada je $xy = yx$. Navedena se tvrdnja lako pokaže koristeći binomnu formulu. Očito vrijedi i $\exp(0) = e$.

Također, G je topološka grupa jer su multiplikacija i inverzija neprekidne u G.

Teorem 7.1. *Vrijede tvrdnje:*

1. *G_1 je otvorena normalna podgrupa od G.*
2. *G_1 je grupa generirana sa $\exp(A)$.*
3. *Ako je A komutativna, $G_1 = \exp(A)$.*
4. *Ako je A komutativna, kvocijentna grupa G/G_1 nema elemenata konačnog reda osim neutrala.*

Dokaz. 1. Zbog teorema 6.1 imamo da u svakoj točki $x \in G_1$ postoji otvorena kugla $U \subseteq G$. Obzirom da U siječe G_1 i da je U povezan, po definiciji od G_1 je $U \subseteq G_1$. Stoga vrijedi da je G_1 otvoren.

Ako je $x \in G_1$, onda je $x^{-1}G_1$ povezan podskup od G koji sadrži $x^{-1}x = e$. Stoga je $x^{-1}G_1 \subseteq G_1$, za svaki $x \in G_1$. Time smo dokazali da je G_1 podgrupa od G.

Osim toga, $y^{-1}G_1y$ je homeomorfna G_1, dakle povezana, za svaki $y \in G$, i sadrži e. Stoga $y^{-1}G_1y \subseteq G_1$. Po definiciji, to znači da je G_1 normalna podgrupa od G.

2. Neka je G_2 grupa generirana sa $\exp(A)$. Za $n = 1, 2, 3, \ldots$, neka je E_n skup svih produkata n elemenata iz $\exp(A)$. Obzirom da je $y^{-1} \in \exp(A)$ čim je je $y \in \exp(A)$, G_2 je unija skupova E_n. Obzirom da je produkt svaka dva povezana skupa povezan skup, indukcijom možemo dobiti da je svaki E_n povezan. Osim toga, svaki E_n sadrži e, stoga je $E_n \subseteq G_1$, pa je

$$G_2 = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \subseteq G_1 \tag{7.4}$$

Kako $\exp(A)$ ima nepraznu nutrinu, obzirom na G; zbog toga isto vrijedi i za G_2. Obzirom da je G_2 grupa i da je množenje bilo kojim elementom $x \in G$ homeomorfizam sa G na G, G_2 je otvoren.

Svaki suskup od G_2 u G_1 je zato otvoren, pa isto vrijedi i za proizvoljnu uniju tih suskupova. Obzirom da je G_2 komplement unije svojih suskupova, G_2 je zatvoren, u odnosu na G_1.

Dakle, G_2 je otvoren i zatvoren podskup od G_1. Obzirom da je G_1 povezan, vrijedi $G_2 = G_1$.

3. AKo je A komutativna, vrijedi $xy = yx, \forall x, y \in A$, pa vrijedi i $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$. To povlači da je $\exp(A)$ grupa. Dakle, $\exp(A) = G_1$.

4. Moramo dokazati iduću propoziciju: Ako je A komutativna, i ako je $x \in G$, i ako je $x^n \in G_1$ za neki $n \in \mathbb{N}$, onda je $x \in G_1$.

   Zbog treće tvrdnje ovog teorema, pod ovim uvjetima, vrijedi da je $x^n = \exp(a)$ za neki $a \in A$. Stavimo $y = \exp(n^{-1}a)$ i $z = xy^{-1}$. Obzirom da je $y \in G_1$, dovoljno je dokazati da je $z \in G_1$.

   Komutativnost od A povlači da je

   $$z^n = x^n y^{-n} = \exp(a)\exp(-a) = e. \tag{7.5}$$

   Stavimo $f(\lambda) = \lambda z - (\lambda - 1)e$, i neka je $E = \{\lambda \in \mathbb{C} : f(\lambda) \in G\}$. Ako je $\alpha \in \sigma(z)$, onda je $\alpha^n \in \sigma(z^n) = \sigma(e) = 1$. Ako $\lambda \notin E$, slijedi da $(\lambda - 1)^n = \lambda^n$. Ta jednadžba je polinom stupnja $n-1$, pa prema osnonvnom teoremu algebre ima $n-1$ rješenje u $\mathbb{C}$. Stoga je E povezan, pa slijedi da je $f(E)$ povezan podskup od G koji sadrži $f(0) = e$. Stoga je $f(E) \subseteq G_1$. Specijalno je $z = f(1) \in G_1$.

Time je dokaz gotov. □

Da bi pokazali da na konkretnom primjeru da se može dogoditi da $\exp(A)$ ne bude grupa, treba nam nešto više teorije nego što smo dosad razvili. Zainteresirane čitatelje upućujemo na Rudinovu knjigu ([7], str. 317.), gdje je dan primjer takve grupe.

Poglavlje III

Komutativne Banachove algebre

8 Ideali i homomorfizmi

U ovom poglavlju ćemo se baviti komutativnim algebrama, iako su neki dijelovi teorije koju ćemo razvijati primjenjivi i u nekomutativnom slučaju. Radi toga ćemo, kao i do sada, eksplicitno reći da pretpostavljamo da je Banachova algebra komutativna, a prisutnost neutrala kao i činjenica da je polje skalara polje $\mathbb{C}$ će se podrazumijevati.

Prvi dio ovoga poglavlja govori o idealima.

Definicija 8.1. *Podskup J komutativne kompleksne algebre A naziva se **ideal** ako vrijedi*

1. *J je podprostor od A u smislu vektorskih prostora, te*
2. *$xy \in J, \forall x \in A, y \in J$.*

Ako je $J \neq A$, J je **pravi ideal**. Pravi ideal koji nije sadržan ni u jednom većem pravmo idealu naziva se **maksimalni ideal**.

Propozicija 8.1. *Vrijede tvrdnje:*

1. *Pravi ideal J Banachove algebre A ne sadrži nijedan invertibilan element od A.*
2. *Ako je J ideal u komutativnoj Banachovoj algebri A, onda je i njegov zatvarač $Cl(J)$ isto ideal.*

Dokaz. 1. Kada bi pravi ideal J sadržavao invertibilan element $x \in A$, množenjem J sa $x^{-1} \in A$ dobili bi da je i $e \in A$, što bi povlačilo da je $J = A$, tj. da ideal nije pravi.

2. $y \in Cl(J)$, trebamo dokazati da je $xy \in Cl(J), \forall x \in A$. U J postoji niz (y_n) takav da je $y = lim_{n\to\infty} y_n$. Kako je $xy_n \in J$ za svaki prirodan broj n, zbog neprekidnosti množenja je $xy = lim_{n\to\infty} xy_n \in Cl(J)$.

$\square$

Teorem 8.1. *Vrijede tvrdnje:*

1. *Ako je A komutativna kompleksna algebra s jedinicom, onda je svaki pravi ideal u A sadržan u nekom maksimalnom idealu od A.*

2. *Ako je A komutativna Banachova algebra, svi maksimalni ideali od A su zatvoreni.*

Dokaz. 1. Neka je J pravi ideal od A. Neka je P skup svih pravih ideala koji sadrže J. Uredimo P parcijalno skupovnom inkluzijom; neka je Q lanac od P (postojanje Q nam osigurava Hausdorffov princip maksimalnosti), i neka je M unija svih članova od Q. Obzirom da je M unija potpuno uređenog skupa ideala, M je ideal. Specijalno je $J \subseteq M$, te je $M \neq A$ jer nijedan od elemenata od P ne sadrži jedinicu $e \in A$. Maksimalnost lanca Q povlači da je M maksimalni ideal od A.

2. Neka je M maksimalni ideal u A. Obzirom da M ne sadrži nijedan invertibilni element od A i obzirom da je skup svih svih invertibilnih elemenata otvoren, $Cl(M)$ također ne sadrži invertibilne elemente. Dakle, vrijedi da je $Cl(M)$ pravi ideal od A, i maksimalnost od M pokazuje da je $M = ClM$, tj. M je zatvoren.

$\square$

Propozicija 8.2. *Neka su A i B komutativne Banachove algebre i neka je ϕ homomorfizam, $\phi : A \to B$. Tada je jezgra od ϕ ideal u A, koji je zatvoren ako je ϕ neprekidan.*

Dokaz. Neka je $J = \{x \in A | \phi(x) = 0\}$. Obzirom da je ϕ homomorfizam i u smislu vektorskih prostora, vrijedi da je J vektorski potprostor od A.

Neka je $x \in A, y \in J$. Tada je $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) = 0$, pa je $xy \in J$. Dakle, J je ideal.

Kako je $\{0\}$ zatvoren u B, zbog neprekidnosti od ϕ vrijedi da je $J = \phi^{-1}(\{0\})$ također zatvoren. $\square$

Obrnuto, neka je J pravi ideal u A koji je zatvoren, i neka je $\pi : A \to A/J$ kvocijentno preslikavanje, kao u slučaju topoloških vektorskih prostora. Tada je A/J Banachov prostor, u odnosu na kvocijentnu normu. Dokazati ćemo da je A/J Banachova algebra i da je π homomorfizam.

Ako je $x' - x \in J$ i $y' - y \in J$, identitet

$$x'y' = (x' - x)y' + x(y' - y) \tag{8.1}$$

pokazuje da je $x'y' - xy \in J$; stoga je $\pi(x'y') = \pi(xy)$. Zato je moguće u A/J definirati množenje sa

$$\pi(x)\pi(y) = \pi(xy)\ (x \in A, y \in A). \tag{8.2}$$

Lako se pokaže da je A/J kompleksna algebra. π je sada homomorfizam, pa zbog $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$, prema definiciji kvocijentne norme, π je neprekidan.

Pretpostavimo $x_i \in A$ $(i = 1, 2)$ i $\delta > 0$. Tada je

$$\|x_i + y_i\| \leq \|\pi(x_i)\| + \delta\ (i = 1, 2) \tag{8.3}$$

za neki $y_i \in J$, prema definiciji kvocijentne norme. Obzirom da je

$$(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) \in x_1x_2 + J \tag{8.4}$$

imamo

$$\|\pi(x_1x_2)\| \leq \|(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)\| \leq \|x_1 + y_1\|\|x_2 + y_2\|, \tag{8.5}$$

pa 8.3 implicira da vrijedi nejednakost za množenje

$$\|\pi(x_1)\pi(x_2)\| \leq \|\pi(x_1)\|\|\pi(x_2)\|. \tag{8.6}$$

Naposlijetku, ako je e jedinični element u A, zbog 8.2 vidimo da je $\pi(e)$ jedinični element u A/J, i obzirom da je $\pi(e) \neq 0$, iz 8.6 dobivamo da je $\|\pi(e)\| \geq 1 = \|e\|$. Obzirom da je $\pi(x)\| \leq \|x\|$, za svaki $x \in A$, pa specijalno i za e, vrijedi da je $\|\pi(e)\| = 1$. Time je dokaz gotov.

Prva tvrdnja idućeg teorema jedna je od ključnih tvrdnji u cijeloj teoriji komutativnih Banachovih algebri. Skupu Δ iz idućeg teorema može se pridružiti kompaktna Hausdorffova topologija, ali postoji čitav niz interesantnih posljedica i bez te topologije. Proučavanje komutativnih Banachovih algebri se može uvelike reducirati na proučavanje bolje poznatih objekata, konkretnije, algebra neprekidnih kompleksnih funkcija na Δ, sa zbrajanjem i množenjem po točkama. Idući teorem govori o tome.

Teorem 8.2. *Neka je A komutativna Banachova algebra, i neka je Δ skup svih kompleksnih homomorfizama od A. Tada vrijedi:*

1. *Svaki maksimalni ideal od A je jezgra nekog $h \in \Delta$.*
2. *Ako je $h \in \Delta$, jezgra od h je maksimalni ideal u A.*
3. *Element $x \in A$ je invertibilan u A ako i samo ako je $h(x) \neq 0$ za svaki $h \in \Delta$.*
4. *Element $x \in A$ je invertibilan u A ako i samo ako x nije sadržan ni u jednom pravom idealu od A.*
5. *$\lambda \in \sigma(X)$ ako i samo ako $h(x) = \lambda$ za neki $h \in \Delta$.*

Dokaz.

1. Neka je M maksimalni ideal u A. Tada je prema teoremu 8.1 M zatvoren, i zato je A/M Banachova algebra. Izaberimo $x \in A$, $x \notin M$, i stavimo

$$J = \{ax + y : a \in A, y \in M\} \tag{8.7}$$

Tada je J ideal u A koji je pravi nadskup od M, obzirom da je $x \in J$, za $a = e, y = 0$. Stoga je $J = A$, i vrijedi da je $ax+y = e$ za neki $a \in A, y \in M$. Ako je $\pi : A \to A/M$ kvocijentno preslikavanje, slijedi da je $\pi(a)\pi(x) = \pi(e)$, što povlači da je svaki nenul element $\pi(x)$ Banachove algebre A/M invertibilan u A/M. Prema Gelfand-Mazurovom teoremu (teorem 6.4), postoji izomorfizam j sa A/M na $\mathbb{C}$. Stavimo $h = j \circ \pi$; tada je $h \in \Delta$, i M je nul-prostor od h.

2. Ako je $h \in \Delta$, tada je $J = h^{-1}(\{0\})$ ideal u A koji je maksimalan jer ima kodimenziju 1.

3. Ako je x invertibilan u A i $h \in \Delta$, onda je

$$h(x)h(x^{-1}) = h(xx^{-1}) = h(e) = 1, \tag{8.8}$$

pa je $h(x) \neq 0$.

Ako x nije invertibilan, onda skup $\{ax : a \in A\}$ ne sadrži e, pa je pravi ideal koji je sadržan u nekom maksimalnom (prema teoremu 8.1) i koji je anuliran nekim $h \in \Delta$, zbog prve tvrdnje ovog teorema.

4. Nijedan invertibilan element nije sadržan ni u jednom pravom idealu, prema propoziciji 8.1. Obrat toga je dokazan u dokazu treće tvrdnje ovog teorema.

5. Neka je $\lambda \notin \sigma(x)$. Stavimo li u trećoj tvrdnji ovog teorema $\lambda e - x$ na mjesto x, dobivamo
$$h(\lambda e - x) = \lambda h(e) - h(x) \neq 0, \tag{8.9}$$
iz čega slijedi da je $h(x) \neq \lambda$.

   S druge strane, za $\lambda \in \sigma(x)$ je $h(\lambda e - x) = 0$ za neki $h \in \Delta$, pa je $h(x) = \lambda$.

□

9 Involucije

Na početku smo spomenuli kako je lijepo svojstvo polja kompleksnih brojeva što ima konjugiranje, koje će nam koristiti kod razmatranja involucija Banachovih algebri. Involuciju možemo shvatiti kao poopćenje pojma kompleksnog konjugiranja. Preciznije je to rečeno u idućoj definiciji.

Definicija 9.1. *Funkcija $x \mapsto x^*$ koja preslikava (ne nužno komutativnu) kompleksnu algebru A u A naziva se **involucija** na A ako ima iduća četiri svojstva, za sve $x, y \in A, \lambda \in \mathbb{C}$:*

1. $(x + y)^* = x^* + y^*$
2. $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$
3. $(xy)^* = y^* x^*$
4. $x^* * = x$

Drugim riječima, involucija je konjugaciono-linearan antiautomorfizam perioda 2.

*$x \in A$ za koji je $x^* = x$ naziva se **hermitski** ili **samoadjungiran**.*

Primjer involucije je $f \mapsto \overline{f}$ na $C(X)$.

Teorem 9.1. *Ako je A Banachova algebra s involucijom, i $x \in A$, onda je*

1. *$x + x^*$, $\imath(x - x^*)$ i xx^* su hermitski,*

2. *x ima jedinstvenu reprezentaciju $x = u + \imath v$, gdje su $u, v \in A$, i oba su hermitski,*

3. *jedinica e je hertmitski,*

4. *x je invertibilan u A ako i samo ako je x^* invertibilan, a u tom slučaju je $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$, te*

5. *$\lambda \in \sigma(x)$ ako i samo ako $\overline{\lambda} \in \sigma(x^*)$.*

Dokaz. Prva tvrdnja očito vrijedi.

Ako je $2u = x + x^*$, $2v = i(x^* - x)$, onda je $x = u + iv$ tražena reprezentacija. Da bi dokazali jedinstvenost, pretpostavimo da je $x = u' + iv'$ druga. Stavimo $w = v' - v$. Tada su w i $\imath w$ hermitski, tako da je

$$\imath w = (\imath w)^* = -\imath w^* = -\imath w. \tag{9.1}$$

To povlači da je w = 0, pa vrijedi jedinstvenost.

Zbog $e^* = ee^*$ i prve tvrdnje vrijedi treća tvrdnja.

Četvrta tvrdnja slijedi iz treće i $(xy)^* = y^*x^*$. Imamo:

$$e = e^* = (xx^{-1})^* = (x^{-1})^*x^*. \tag{9.2}$$

Posljednja tvrdnja se dobiva iz četvrte ako stavimo $\lambda e - x$ umjesto x, i primjenimo $(\lambda x)^* = \overline{\lambda}x^*$. □

Zaključak

Kao što smo već spomenuli u uvodu, teorija Banachovih algebri započela je s generalizacijom Cauchyjeve teorije funkcija kompleksne varijable. Naravno, kasnije su i drugi teoremi iz kompleksne analize dobili svoje generalizacije.

To bez sumnje nije jedina primjena teorije Banachovih algebri. Primjenjuju se u rješavanju diferencijalnih i integralnih jednadžbi, izučavanju dinamičkih sustava i drugdje. Uostalom, već je sama algebra omeđenih linearnih operatora Banachova algebra, tako da ne moramo ići daleko u potrazi za mogućnostima primjene ove teorije.

Htio bih se osvrnuti na literaturu i izbor građe. Moj glavni izvor bio je Rudinova "Functional analysis" [7], a pored toga sam neke stvari preuzeo iz Yoshide [10]. Prvo poglavlje sastavljeno je prema Mardešiću [5] i Kurepi [3], osim nekoliko teorema koje sam preuzeo iz Rudinove "Real and complex analysis" [8]. Ostatak, dio prvog poglavlja vezan uz funkcionalnu analizu, te drugo i treće poglavlje uglavnom sadržajno prate Rudina [7], osim što sam po dogovoru sa prof. Jardasom neke teme izostavio (diferenciranje i Gelfandovu teoriju, primjerice) i neke dopunio (nekolicinom manjih dokaza koje sam samostalno proveo i povijesnim pričama iz Yoshide [10], Smithiesa [9] i opće kulture). Jednostavno nije bilo prostora da se o svemu progovori dovoljno detaljno i na pravi način, tako da sam bio primoran napraviti izbor.

Nakon svega želim reći da mi je bilo drago što sam uzeo ovu temu za diplomski rad. Dosta sam naučio u procesu pisanja ovog rada, i uvidjeo kako čvrsta povezanost analize i algebre može biti, i da to nikako ne staje na topološkom vektorskom prostoru i izometričkom izomorfizmu.

Dodatak: Banachova biografija

Osobno mi je povijesna priča o nastanku funkcionalne analize jako zanimljiva. Detaljan, a relativno kratak pregled najvažnijih događaja ima Smithies u svom radu [9]. Nažalost, većina knjiga koje spominje nisu mi bile dostupne. Tako da sam odlučio ovaj dodatak posvetiti prema mojem mišljenju navećem matematičaru 20. stoljeća, čovjeku čije se ime javlja već u naslovu ovog diplomskog rada i mnogih drugih radova – Stefanu Banachu.

Tekst je većim dijelom je sastavljen prema Noeovom radu [6], a citati su kao i u tom radu preuzeti iz Kaluzine knjige o Banachovom životu [2].

Već smo u uvodnom poglavlju spomenuli kako se početkom 20. stoljeća moderna matematika počela naglo razvijati. Međutim, ti su rezultati većinom pripadali zemljama zapadne Europe te Americi. U Poljskoj je u godinama prije prvog svjetskog rata situacija bila bitno drugačija. Naime, većina studenata nije birala znanstvenu karijeru, već edukacijsku, a tek se relativno mali broj onih koji su završili srednje škole odlučivao dalje obrazovati. Tada je Zygmunt Janiszewski, poljski matematičar, donio s nekolicinom kolega idući plan. On je krenuo

> sa pretpostavkom da "Poljski matematičari ne moraju biti zadovoljni sa ulogom sljedbenika ili kupaca stranih matematičkih centara," već "mogu postići neovisno mjesto za poljsku matematiku." Jedan od najboljih načina da se to postigne, predložio je Janiszewski, bio je da različite grupe matematičara da se usredotočena relativno usko područje na kojem su poljski matematičari imali zajednički interes i – što je još važnije – već ranije postigli internacionalno značajne rezultate. Ta su područja uključivala teoriju skupova s topologijom, i osnove matematike (uključujući matematičku logiku). [2]

Taj se plan pokazao uspješnim, i u godinama između prvog i drugog svjetskog rata Poljska je stvorila velik broj uspješnih matematičara. To je vrijeme kada je Stefan Banach, za kojeg se kaže kako je bez sumnje jedan od najvećih, ako ne i najveći matematičar 20. stoljeća, “došao na scenu” sa nizom radova u području funkcionalne analize.

Stefan Banach rođen je 30. ožujka 1892. u Krakowu. Njegov otac bio je Stefan Grezcek, a majka Katarzyna Banach; ime je dobio po ocu, a prezime po majci. Poznato je da nisu bili u braku (što se može naslutiti iz njihovih različitih prezimena), ali se o majci ne zna ništa jer ga se odrekla ubrzo nakon njegovog krštenja. Banach je u nekoliko navrata pokušao nešto saznati o njoj, ali njegov otac nikad nije pristao o tome razgovarati, rekavši da se zakleo da nikad neće odati tajnu. Nagađa se da je Banacha odgajala baka, ali to se ne može sa sigurnošću tvrditi. Ima li ili ne istine u tome, sigurno je da je Banach neprestano bio u kontaktu s njom sve do njene smrti. Također se zna da ga je njegov otac povjerio njegov odgoj dvjema ženama, Franciszki Plowi i njenoj kćeri Mariji. Banach je njih doživljavao kao maćehu i veliku sestru, i prema standardima onoga doba živio je dosta dobro. Ipak, čini se da on svoja sjećanja iz djetinjstva nije doživljavao kao sretna.

Prvi čovjek koji je prepoznao da Banach ima talenta bio je Juliusz Mien, francuz koji je došao u Krakow 1870. i zarađivao za život kao fotograf i prevoditelj. Poznavao je Mariju i preko nje je upoznao i Banacha. Naučio je ga francuski jezik, što je vjerojatno utjecalo na Banachovo okretanje matematici relativno rano, i kasnije mu jako pomoglo u životu (francuski je bio jedan od “službenih jezika” matematike onog doba).

Grezcek, koliko je poznato, nije nikad zaboravio na svoga sina (iako se kasnije ženio i imao i druge djece), i uvijek je bio u kontaktu s Franciszkom i Marijom,i pratio Banacha. Pomagao im je financijski kada god je mogao. Banach se nikad nije osjećao loše po pitanju odnosa s ocem, kako tvrde izvori, i komunikacija s njim je bila bogata, srdačna i uljudna. Iako nisu nikada pokazivali nikakvu toplinu ili povezanost, Banachova polusestra Antonina rekla je Kaluzi [2] u intervjuu da, iako su se voljeli, oni obojica nisu bili ljudi koji bi to pokazivali na neki način.

1902. je Banach, tada 10 u dobi od 10 godina, počeo pohađati Henryk Sienkiewicz Gimnaziju broj 4 u Krakowu. Nema mnogo informacija o Banachovim školskim danima, osim službenih školskih dokumenata. Ipak, poznata je nekolicina stvari o Banachu dok je bio u gimnaziji[1]. Imao je dva dobra prijatelja, Witolda Wilkosza, koji je kasnije postao

[1]Školstvo je u to doba bilo drugačije organizirano i tadašnja gimnazija ne označuje isti stupanj obrazovanja kao i danas.

matematičar, i Mariana Albinskog. Zahvaljujući Albinskom mi imamo informacije o Banachu iz tog doba. Albinski se Banacha sjeća kao dobrog prijatelja, uglavnom tajnovitog, iako se znao našaliti. Albinski opisuje oba svoja prijatelja u svojim memoarima:

> Banach je bio mršav i blijed, i imao je plave oči. Bio je uljudan u ophođenju sa ostalim učenicima, ali osim matematike ništa ga nije zanimalo. Ako je uopće govorio, govorio bi vrlo brzo, brzo koliko je i matematički razmišljao. Imao je nevjerojatan dar za brzo razmišljanje i računanje, i ljudi koji su bili određeni da to procjenjuju vjerovali su da je vidovit.
>
> Wilkosz mu je bio sličan na jedan način. Nije postojao matematički problem koji njih dvojica nisu mogli brzinski "srediti". Dok je Banach bio brži u rješavanju matematičkih problema, Wilkosz je bio fenomenalno brz u fizici, koja Banacha nije zanimala. [2]

Postoje podaci da je Banach imao veliku dozu skepticizma. Priča se da bi često pitao školskog svećenika, Oca Plyka, pitanja kao što su "Ako je Gospodin svemoguć, može li on stvoriti kamen koji ne može ni sam podići?"

1910. je Banach, zajedno s ostatkom razreda, došao na maturu. To je vjerojatno bila kritična situacija za mladog Banacha, jer, kao što je već ranije rečeno, Banacha ništa osim matematike nije zanimalo. Kada je došlo vrijeme za polaganje mature, imao je osam negativnih ocjena. Školsko vijeće je odlučilo da ga pusti da maturira, a odlučujući je glas bio onaj Oca Plyka, unatoč Banachovim ponekad neprimjerenim pitanjima.

Nakon što so Banach i Wilkosz stekli svoje potvrde o maturi, došlo je vrijeme za razgovor o planovima za budućnost. Obojica su bila matematički nadareni, ali su imali dojam da je matematika previše napredna i da se nije imalo što više otkriti, i istraživačka karijerijera u matematici ne bi bila moguća ili preporučljiva. Odlučili su krenuti drugim putem. Pored matematike, Wilkosz je imao i dar za jezike, pa je odlučio studirati istočnjačke jezike na Jagiellonskom Sveučilištu u Krakowu. Međutim, već nakon dvije godine tamo prebacio se na matematiku i stekao doktorat 1919. Banach je odlučio studirati strojarstvo i otišao u Lvov u današnjoj Ukrajini. Banach i Wilkosz su kasnije u šali priznali da su pogriješili po pitanju mogućnosti istaživanja koje postoje u matematici.

Banach je napustio Krakow i preselio se u Lvov ne očekujući ninakvu finacijsku pomoć. Grezcek mu je rekao da je obećao mu pomoći da stekne maturu, ali da je od tamo nadalje morao se sam financirati. Morao je raditi da bi studirao, pa je studirao nešto sporije nego većina studenata. 1914. je prošao polu-diplomski ispit[2], i tada je počeo Prvi Svjetski Rat, pa su predavanja zaustavljena do kraja rata. Banach je izbjegao vojnu obavezu jer je bio ljevak i slabo vidio na lijevo oko. Unatoč tome, samovoljno je odlučio sudjelovati i dobio zadatak da nadzire pješadiju. Ne zna se što je dalje bilo sve do 1915. kada su se predavanja nastavila, i tada je vjerojatno Banach otišao nazad studirati. Međutim, to se ne može sa sigurnošću tvrditi, jer je prvi idući podatak koji imamo iz 1916. Te godine slučajan susret sa Hugom Steinhausom je promijenio Banachov život, osobni i profesionalni. Kaluza o tome piše:

> Tko je bio Hugo Dionizij Steinhaus? Rošen 1887. u gradu Jaslu u pokrajini Galiciji u židovskoj obitelji. Njegov ujak je bio poznati političar, član Austrijskog parlamenta. Iako je bio tek pet godina stariji od Banacha, njegova matematička karijera je bila puno ispred Banachove. Stjecao je formalnu edukaciju u Lvovu i kasnije u Gottingenu, gdje je 1911. stekao naziv doktora znanosti pod vodstvom Davida Hilberta za doktorat na temu trigonometrijskih redova. Od 1920. do 1914. on je bio profesor matematike na Lvovskom Sveučilištu. Kasnije, kada je započeo Drugi Svjetski Rat, prešao je u Wroclaw, gdje je radio kao sveučilišni profesor i bio član Poljske Akademije Znanosti. Tijekom tog razdoblja on je posjetio nekoliko sveučilšta u Sjedinjenim Americkim Državama, uključući Notre Dame. Steinhaus, zajedno sa Banachom je bio osnivač Lvovske Škole Matematike. Njegova bibliografija sadrži preko 170 članaka na temu Fourierovih redova, ortogonalnih razvoja, linearnih operatora, teorije vjerojatnosti, teorije igara, i primjena matematike na biologiju, medicinu, elektrotehniku, pravo, i statistiku. Također je bio poznati popularizator znanosti. [2]

Steinhaus je uvijek govorio kako je Banach njegovo najveće znanstveno otkriće. U svojim memoarima Steinhaus govori o slučajnom susretu s Banachom:

> Iako je Krakow formalno i dalje bila utvrda, bilo je sigurno šetati uvečer u Krakowskom Planty parku. Tokom jedne od tih šetnji načuo sam riječi "Lebegova

[2] U današnjim terminima, završio je preddiplomski studij.

> mjera". Prišao sam klupi i predstavio se dvojici mladih studenata matematike. Rekli su mi da imaju još jednog prijatelja, kojeg su veoma nahvalili. Ta dvojica mladića bili su Stefan Banach i Otto Nikodym.
>
> Od tada bi se nalazili redovito, i obzirom da su u to doba u Krakowu bili i Wladyslaw Slebodzinski, Leon Chwistek, Jan Kroć, i Wlodzimierz Stozek, odlučili smo osnovati matematičko društvo. [2]

Društvo o kojemu se ovdje govori je Poljsko Matematičko Društvo, koje će nešto kasnije postati važno.

1920. Banach se oženio Lucijom Braus, koju je upoznao preko Steinhausa. Kaluza priča kako je "Banach jako volio svoju ženu. Ona je bila i ostala njegov najbliži i najodaniji drug kroz preostalih dvadeset i pet godina njegova života. Zvao ju je Lusia." [2]

Steinhaus je jednu večer Banachu opisao problem koji mu je zadavao probleme već duže vrijeme. Nekoliko dana kasnije Banach ga je riješio. Problem je bio vezan uz konvergenciju parcijalnih suma Fourierovih redova integrabilne funkcije. Steinhaus je bio oduševljen, i nedugo zatim rješenje je objavljeno 1918. u Zborniku Krakowske Akademije, pod naslovom "Sur la convergance en moyenne de series de Fourier". To je bio Banachov prvi objavljeni rad i označio je njegov početak kao matematičar.

Od tada nadalje, Banach je manje ili više bio predan matematici. Njegove ideje bile su originalne i vrijedne pažnje, i on je objavljivao radove poprilično često. S objavom njegova rada o Fourierovim redovima, poljska matematička zajednica je počela pratiti njegove radove, uvidjevši kako nema sumnje da on ima talent. Rad je bio napisan na Francuskom, koji je bio preferirani jezik Europske znanstvene zajednice. Kraj Prvog Svjetskog Rata označio je uspostavu nezavisne Poljske, što je utjecalo na poljsku matematičku zajednicu i način na koji ona gleda na znanost i istraživanje. Banach i Steinhaus, između ostalog, su bili ključni u tom procesu. Između 1919. i 1929. Banachovo istraživanje i doprinosi tomp procesu donijeli su mu reputaciju jednog od vodećih matematičara u Poljskoj.

1919. je Banach objavio drugi rad, "Sur la valeur moyenne des fonctions orthogonales", ovaj put svoj. Ugrubo rečeno, dokazao je da suma aritmetičkih sredina niza orthonormalnih funkcija konvergira ka nuli.

Iste godine, nešto kasnije, Banach je objavio svoj treći rad, "Sur l'equation fonctionelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$". Problem nalaženja funkcija koje zadovoljavaju to svojstvo bio je izazov mnogim matematičarima, počevši sa Louisom Augustionom Cauchyjem. Banach je dokazao rezultat koji je bio jači nego većina rezultata prije, a da je istovremeno imao jednostavniji i elegantniji dokaz. Ta dva rada bi već osigurala Banachovu reputaciju u među matematičarima koji su se bavili funkcijama realne varijable, ali on nije tu stao. Sasvim suprotno, ova dva rada su samo označila početak čitavog niza istraživanja i radova u tom području matematike.

1920. je bila važna godina za Banacha. Uz vjenčanje, Banachu je ponuđeno mjesto asistenta na Lvovskom Sveučilištu, koje je prihvatio. To je bio njegov prvi pravi posao u akademskoj karijeri. Pored toga, uz njegove radove, konkretno peti "Sur les solutions d'une equation fonctionell de J. Cl. Maxwell" u koautorstvu sa Stanislawom Ruziewiczem, i njegov šesti, nazvan "Sur les fonctions derives des fonctions mesurables", Banach je napokon napisao svoj doktorat. Nazvan "Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales", zaslužujue pažnju zbog dva razloga: njime je stekao doktorat i prezentirao neke od najvažnijih ideja koje je ikad objavio. Kaluza o tome piše:

> Prije svega, uvodi se apstraktni objekt koji će kasnije biti nazvan Banachov prostor. Banach je dao aksiomatsku definiciju takvih beskonačnodimenzionalnih prostora i uveo pojam linearne transformacije na njima. Mnogi konkretni primjeri za slučajeve koji su se do tada neovisno razmatrali sad su postali ujedinjeni pod pojmom Banachovog prostora. Dobro poznati Euklidski, konačnodimenzionalni prostori bili su očiti primjeri specijalnih slučajeva, i njihova struktura je relativno jednostavna, i jedine linearne transformacije na njima su translacije, rotacije i refleksije. Puno su zanimljiviji bili beskonačnodimenzionalni Banachovi prostpori funkcija važnih u mnogim domenama klasične analize. Njihova struktura, i struktura linearnih transformacija (operatora) na njima, je puno bogatija i još ni dan danas nije do kraja istražena. Iako je to bio Banachov prvi rad u području koje danas nazivamo funkcionalna analiza, njegova aksiomatizacija bila je nevjerojatno sveobuhvatna, i na jedan način, završna.[3] Treba se reći da je, na određeni način, njegova dizertacija učinila da je funkcionalna analiza odjednom postala nezavisna matematička

[3]Drugim riječima, dao je aksiomatizaciju koja je u upotrebi još i danas.

disciplina.[2]

Banach je inzistirao na potpunosti tih prostora u njegovom doktoratu. Razlog tome je bio njegovo uvjerenje da su potpuni prostori nužni da se dokaže korisne teoreme. Dva takva korisna i važna teorema postoje u njegovom radu. Prvi kaže da je "limes po točkama niza linearnih i neprekidnih funkcija nužno linearan i neprekidan". Drugi, za koji zna većina matematičara neovisno o području, je poznati Banachov teorem of fiksnoj točki.[4]

Teorem 9.2 (Banachov teorem o kontrakciji)**.** *Neka je $T : X \to X$ kontrakcija s koeficijentom kontrakcije κ na potpunom metričkom prostoru (X, d). Tada postoji jedinstvena fiksna točka $u \in X$. Pored toga, za svaki $x \in X$ niz $x, T(x), T^2(x), \ldots, T^k(x)$ konvergira prema točki u.*

Banach imao nekoliko otežavajućih okolnosti u procesu stjecanja doktorata. On je bio primarno samouk, i nikad nije diplomirao na Lvovskom Sveučilištu. Bio je potreban posebni zakonski ustupak od strane tadašnjeg ministra školstva da bi Banach mogao upisati magisterij, koji je bilo potrebno završiti prije doktorskog ispita. Osim toga, unatoč velikom broju radova, Banach nije volio pisati. Volio je razmišljati o problemima, ali kada je trebalo sve zapisati, vrlo brzo bi mu postalo dosadno. Njegova dizertacija je bila spremna u njegovoj glavi dugo vremena, i toga su bili svjesni njegovi profesori, ali su ga morali "na prijevaru" navući da je napokon napiše. Kaluza o tome kaže:

> Turowicz je zapisao:
>
> Profesor Ruziewicz je rekao jednom od svojih asistenata da prati Banacha tokom njegovih čestih posjeta kafiću, ispituje ga o njegovom radu, i nakon toga zapiše Banachove teoreme i dokaze. Kada je sve to bilo napisano, prezentirano je Banacho koji je zatim doradio tekst. Tako je njegov doktorat napokon završen.
>
> U 28. godini svog života Banach je postao doktor matematičkih znanosti. Njegov mentor je bio Antoni Lomnicki.[2]

Nekoliko idućih godina su za Banacha bile dosta ispunjene poslom. U srpnju 1922. primljen je kao Professor Extraordinarius na Jan Kazimierz University. Iako je financijski

[4] Taj teorem se može, između ostalog, naći u Mardešiću [5].

trebao biti prilično bez problema, živio je malo iznad onoga što si je mogao priuštiti pa je zapao u dugove. Napisao je udžbenike da bi si povećao prihode. Iako je imao relativno malo vremena, on je i dalje istraživao i objavljivao radove prilično impresivno brzo. Objavio je još nekoliko radova, uključujućči "Sur le probleme de la mesure", gdje je po prvi puta uveo pojmove Banachovog integrala i Banachovog općeg limesa. Ta dva pojma su bitna, ali će uvijek biti u sporednoj ulozi u usporedbi sa Lebesgueovom mjerom, jer je Lebesgueova mjera definirana na široj klasi funkcija.

1924. je objavio nekoliko radova, uključujući jedan "Sur la decompsition des ensembles de points en parties de respectivement congruentes", u koautorstvu sa Alfredom Tarskim. Osnovni rezultat toga rada je ono što se naziva Banach-Tarskijev paradoks, koji daje sumnje u valjanost aksioma izbora. Teorem zapravo tvrdi daje danu kuglu moguće, koristeći aksiom izbora, rastaviti u nekoliko infinitezimalnih dijelova, i onda od toga staviti *dvije* kugle jednake prvotnoj. Aksiom izbora garantira egzistenciju dvije kugle, ali ne daje ideju kako ih konstruirati. Inače, zanimljivo je da je to jedna od rijetkih netrivijalnih tvrdnji u modernoj matematici koju je moguće lako objasniti laicima u tom području.

Kaže se da su godine između 1924. i 1929. bile sretne godine za Banacha. Nastavio je istraživati i objavljivati radove, podučavati i putovati. Zaradio je mnoga odličja, i bio je veoma poštovan znanstvenik. 1929. u suradnji sa Steinhausom Banach je osnovao novi školski časopis, Studia Mathematica, koji će biti važan nešto kasnije. Kaže se da su dvije najvažnije stvari koje je Banach napravio u vremenu između dva svjetska rata osnivanje tog časopisa i izdavanje njegove najznačajnije knjige, "Theorie des operations lineares" [1], objavljene 1932.

Pored radova koje je objavljivao, 1932 je počeo raditi kao dopredsjednik Poljskog Matematičkog Društva. I dalje je predavao na Jan Kazimierz Sveučilštu i Lvovskom Sveučilštu. Osim toga je objavio još nekoliko radova u kojima je nastavio graditi na osnovama koje je postavio u svojoj knjizi [1]. Istraživanje, podučavanje i dobivanje odlikovanja su obilježili to razdoblje Banachova života.

Jedna stvar o kojoj još nismo govorili je Banachov stil istraživanja. Nije volio raditi sam na tihom mjestu, izgleda da mu je trebalo nešto pozadinske buke da bi se zaista mogao koncentrirati. Banach je većinu najboljih rezultata sastavio tijekom čestih posjeta Škotskom Kafeu, koji je, zahvaljujući prvenstveno njemu, ušao u legendu.

Stanislaw Ulam, jedan od Banachovih studenata, objasnio je što se događalo u Škotskom Kafeu u svojoj autobiografiji "Adventures of a Mathematician". Ulam opisuje mramorne stolove na koje se moglo pisati olovkom, i kaže da bi Banach onda napisao neku jednadžbu na stol, primjerice $y = f(x)$, i onda bi svi oko stola sjedili, pili kavu i raspravljali o tome. Neki od tih razgovora bi doslovno trajali danima. Kada bi Banach radio na nekom problemu, on bi bio nevjerojatno koncentriran, i rijeko bi, ako uopće, razmišljao o ičemu drugom. Mnogi su rezultati otkriveni na tim mramornim stolovima, i većinom nažalost izgubljeni. Međutim, neki od njih su sačuvani u knjizi koju Ulam opisuje. Takozvana Škotska Knjiga se pominje i na mnogo drugih mjesta, primjerice na web stranici Lviv Actuaries piše:

> In 1935 a large notebook was purchased by Banach and deposited with the head waiter of the "Scottish Cafe". Mathematics questions/problems which after considerable discussions were found suitable were recorded in the "book". Occasional visitors (Henri Leon Lebesgue, John von Neumann, Waclaw Sierpinski) also recorded their problems there. Some of the problems were solved immediately or shortly after they have been posed. Quarter of the problems remain unsolved to this day. When World War II started, Lwow was occupied by the Soviet Union. The last entry into the book was made on May 31, 1941, - less than a month before the war betweeen Germany and Soviet Union began. When the World War came Mazur putted the book in a little box and buried near the goal post of a certain soccer field in Lviv. The book survived and was found after the war by the son of Banach (who died in 1945) in Lviv. It was given to Steinhaus who in 1956 sent a copy of it to Ulam in US (Los Alamos, New Mexico). Every problem in the book carries the name of the person who suggested the problem. Frequently a prize is offered for solution of the problem. Prizes range from "two small beers" to "fondue" in Geneva. The book contains about two hundred problems, written mostly in Polish, but also in German, Russian, French and English. The book was translated to English and published in Los Alamos by Ulam in 1957. It came to be known among mathematicians as "The Scottish Book". Later a corrected reprint was made in 1977. In 1981 a version with comments, as well as lectures of "The Scottish

> Book Conference" was published by Birkhauser publishers (Boston) under the name "The Scottish Book: Mathematics from the Scottish Cafe" edited by R. Daniel Mauldin.

Neposredno prije početka drugog svjetskog rata, Banach je dobio nekoliko odlikovanja koja su potvrdila njegov status u matematičkoj zajednici. U travnju 1939. odabran je za predsjednika Poljskog Matematičkog Društva, a u lipnju iste godine Banachu je dodijeljena nagrada Grand Prix od strane Pojske Akademije Znanja. Ta nagrada je uključivala i novčani dio, jednak prosjčenoj godišnjoj stipendiji američkog sveučilišnog profesora. Banach ipak nije uspio iskoristiti taj novac, jer je rat započeo i bankovni računi su bili zamrznuti. Kaluza o tome piše:

> Službena dodjela nagrada je trebala biti u listoapdu, s početkom nove akademske godine, ali rat je započeo 1. rujna i dodjela nije mogla biti održana. S 1. listopadom Lvov je već bio okupiran od strane sovjetskih trupa. [2]

Banachu je reputacija bila od koristi kada su Sovjeti preuzeli Lvovo. Poštovali su njegove doprinose matematici, i uvijek je imao dobar odnos s njima. Dozvoljeno mu je da ostane u Lvovu kao dekan Fizičko-matematičkog fakulteta i pročelnik Odjela za matematičku analizu na Jan Kazimierz Sveučilištu. Mnogi drugi su bili deportirani ili streljani. Otprilike u ovo vrijeme, Banachov otac i polu-sestra Antonina su stigli u Lvov u bijegu od njemačke vojske. Banachu je bilo drago da ih vidi i da može s njima dijeliti društveni ugled koji je postigao. Nije nikad bio ljut na sovga oca, i iako nije nikad bio blizak s Antoninom, tokom vremena koje su proveli zajedno razvio je s njom odnos kakav je uobičajen među rođacima. Banachov život se nije mnogo promijenio u ovom vremenu, i dalje je poučavao, pisao radove i vršio administraciju koja mu je bila dodijeljena. To nažalost nije trajalo za vrijeme rata.

U lipnju 1941. je njemačka vojska ušla u Lvov. Kako je bio član intelektualne elite i prijatelj sa Sovjetima, bio je u velikoj opasnosti.

Tijekom noći 3. srpnja 1941. 40 poljskih akademika, profesora, pisaca i ostalih predstavnika Lvovske intelektualne elite je bilo likvidirano od strane Nacista i ukrajinskih nacionalista. Neki od stradalih bili su Tadeusz Boy-Zelenski, pisac i novinar, Wlodzimierz Stozek, kirurg, Tadeusz Ostrowski, Antoni Lomnicki i Stanislaw Ruziewicz, matematičari.

Taj je čin bio tek dio većeg plana koji je uključivao uništenje pojske intelektualne elite u Lvovu.

Banach je uspio preživjeti to, i nije sigurno da li je on bio na popisu onih koje se namjeravalo lividirati. Nastavio je živjeti pod nacističkom okupacijom u Lvovu, i radio kao hranitelj uši na Rudolf Weigl Bakteriološkom Institutu. Posao je iomao dobru stranu, a ta je bila da je dao svima koji su stamo radili osobnu kartu koja im je omogućavala da žive relativno sigurno pod nacisitičkom okoupacijom. To je utjecalo na pogršanje Banachovog zdravlja, i on je nastavio to raditi do 1944. do dolaska Sovjeta u Lvov.

To je značilo poboljšanje kvalitete Banachovog života, ali nažalost nije doživio dovoljno da ponovno zauzme svoje mjesto u Lvovskom društvu jer je već ranije obolio od raka pluća. Kaluza o tome piše:

> Stefan Banach je umro 31. kolovoza 1945. u Lvovu u stanu u ulici 12 Dwernickiego. Imao je tek 53 godine i još uvijek je imao planove za budućnost. Vijesti o velikom uspjehu njegovih bivših studenata u SAD-u su počele stizati sa zapada. Njegovom pogrebu prisustvovale su stotien ljudi. Pločnici Ulice Svetog Nikole, kojima je on često hodao, bile su ispunjene studenticama Jan Kazimierz Sveučilišta, i svaka je držala kiticu cvijeća. Banachovi ostaci su ostavljeni u obiteljskom grobu obitelji Rield. Grob se nalazi na Lyczakowskom groblju, pored vrata koja suse nekad upotreblajvala kao izlaz na Ulicu Svetog Petra. 1990. njegov pepeo je prebačen u grobnicu sklopu crkve Na Skalce u Krakowu.[2]

Tako je završio život jednog od najvećih matematičara 20. stoljeća. Njegova ostavština je iznimno vrijedna, i stalno se nalaze nove primjene njegovih teorija. Za ilustraciju važnosti njegovih otkrića u matematici, postoji podatak da na Mathematical Reviews pretraga za "Banach" daje preko 11 tisuća rezultata, a za 'Hilbert' oko 7 tisuća. Kako neke njegove teorije nisu do kraja shvaćene ni danas, možemo se s pravom pitati što bi tek ostvario da je duže živio.

Bibliografija

[1] Stephan Banach. *Théorie des Opérations Linéaires.* Warszawa, 1932.

[2] Roman Kaluza. *Through a Reporter's Eyes: The Life of Stefan Banach.* Birkhäuser, Boston, 1996. Translated and edited by Ann Kostant and Wojbor Woyczynski.

[3] Svetozar Kurepa. *Funkcionalna analiza - elementi teorije operatora.* Školska knjiga, Zagreb, 1990.

[4] N. P. (Klaas) Landsman. Lecture notes on C*-algebras, Hilbert C*-modules, and quantum mechanics, 1998. preprint se može pronaći na arXiv.org:math-ph/9807030.

[5] Sibe Mardešić. *Matematička analiza I.* Školska knjiga, Zagreb, 1977.

[6] Jeremy Noe. Stefan Banach, 2005. članak nije objavljen, ali može se naći na adresi: www-math.cuvender.edu/~wcherowi/courses/m4010/s05/noe.pdf.

[7] Walter Rudin. *Functional analysis.* Tata McGraw-Hill Publishing Company Ltd., New Delhi, tmh edition, 1974.

[8] Walter Rudin. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.

[9] Frank Smithies. The shaping of functional analysis. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 29(2):129–138, March 1997.

[10] Kosaku Yoshida. *Functional analysis.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1978.